

Résumé de cours d'électromagnétisme niveau L2

Jean-Marie Malherbe

▶ **To cite this version:**

Jean-Marie Malherbe. Résumé de cours d'électromagnétisme niveau L2. Licence. Paris, Université PSL, France. 2024, pp.22. ⟨hal-04822414⟩

HAL Id: hal-04822414

https://cnrs.hal.science/hal-04822414v1

Submitted on 6 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

Résumé de cours d'électromagnétisme L2

*(Les champs vectoriels sont en caractères **gras**)*

Jean-Marie Malherbe, astronome émérite, 5 Décembre 2024

Observatoire de Paris – Université PSL

Ce document résume les résultats du cours donné en Licence L2 (CPES) à l'Université PSL de 2013 à 2021

I - Mouvement des charges dans un champ électrique et magnétique

*1 – Force de Lorentz exercée sur une charge q de vitesse **v***

F = q **E** + q **v** Λ **B** (force électrique + magnétique, en Newton)

Puissance de la force (en Watt) : P = **F.v** = q **E.v** (seule la force électrique travaille)

Au repos, ou bien si **v** // **B**, pas de force magnétique

2 – Conservation de l'énergie mécanique : cinétique + potentielle (en l'absence de frottements)

½ m v² + q V = constante (V potentiel électrique en Volt), énergie en Joule

E et V liés par la relation **E** = - **grad** V ; **B** n'intervient pas car **v**. (**v** Λ **B**) = 0

qV = énergie potentielle de la charge q portée au potentiel V

3 – Effet du champ électrique : accélération ou freinage

Accélération du mouvement : **a** = (q/m) **E**, peut s'intégrer directement :

Si **E** = **constante**, **v**(t) = (q/m) **E** t + $\mathbf{v_0}$ et **OM**(t) = ½ (q/m) **E** t² + $\mathbf{v_0}$ t + $\mathbf{OM_0}$

Se projette sur les axes, trajectoire rectiligne ou parabolique, vitesse initiale $\mathbf{v_0}$, position initiale M_0

4 – Effet du champ magnétique : déviation

Il y a conservation de l'énergie cinétique : v² = v//² + v⊥² = constante (donc v = ||**v**|| = cte)

Dans un champ **B** constant, **B.v** = cte implique :

v// = cte = vitesse de dérive dans la direction de **B**

puis ||**v**|| = cte implique v⊥ = cte = vitesse de giration dans le plan orthogonal à **B**

v// et v⊥ sont fixés par les conditions initiales en t = 0

Trajectoire : hélice d'axe **B** si v// ≠ 0, cercle dans le plan orthogonal à **B** si v// = 0

d**v**/dt = - (q/m) **B** Λ **v** = **Ω** Λ **v** définit **Ω** = - (q/m) **B** comme vecteur vitesse angulaire

Ω est colinéaire à **B**, de même sens si q < 0 (électrons), de sens opposé si q > 0 (protons)

Ω = ||**Ω**|| = (q/m) B est la pulsation gyromagnétique (radian/s)

v⊥ = Ω R définit le rayon de giration R (rayon de l'hélice)

II - Electrostatique / Magnétostatique

*1 - Distributions de charges volumiques, surfaciques, linéiques (densités de charge ρ, σ, λ) et densités de courants (vectorielles, volumique **j**, surfacique $\mathbf{j}_s$)*

dq = ρ dv *ou* σ dS *ou* λ dl (Coulomb) dI = **j**.**dS** *ou* **j**s.**dl** (Ampère)

Cm^{-3} Cm^{-2} Cm^{-1} Am^{-2} Am^{-1}

L'intensité I est le flux de **j** à travers une section S

2 - Forces électrostatiques……..et magnétiques

Pour une charge ponctuelle q :

F = q **E** (Newton) **F** = q **v** Λ **B** (Newton) force de Lorentz

Pour des distributions volumiques, surfaciques, linéiques de charges ou de courants :

dF = ρ **E** dv *ou* σ **E** dS *ou* λ **E** dl **dF** = **j** Λ **B** dv *ou* **j**s Λ **B** dS *ou* I **dl** Λ **B**

force de Laplace (nulle si **j** // **B**)

3 – Equations de Maxwell locales

Propriété du champ électrique et magnétique :

rot E = 0 (Maxwell Faraday) div **B** = 0 (Maxwell Thomson)

Relation entre le champ et sa source (sources = charges ou courants) :

div **E** = ρ/ε_0 (Maxwell Gauss) **rot B** = μ_0 **j** (Maxwell Ampère)

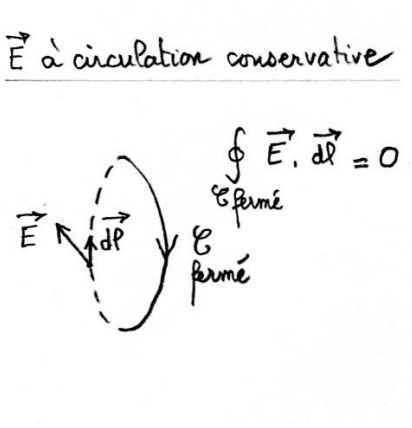
E en Volt/m B en Tesla

$1 / 4\pi\varepsilon_0 = 9\ 10^9$ SI $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ SI ($\varepsilon_0\ \mu_0\ C^2 = 1$)

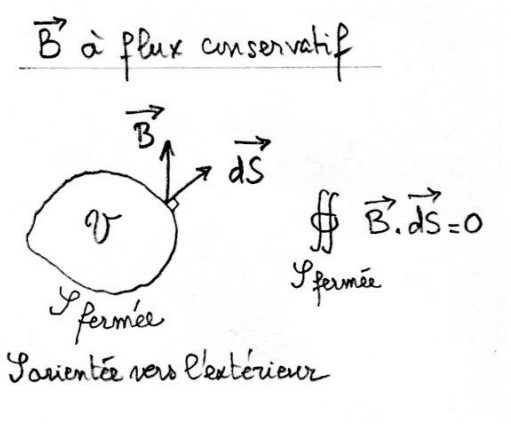
Les équations de Maxwell sont découplées en électrostatique et magnétostatique. Lorsque la distribution de charges ou courants s'y prête (symétries, invariances), on peut utiliser plus simplement les équations globales.

4 – Equations de Maxwell globales sur une portion finie d'espace

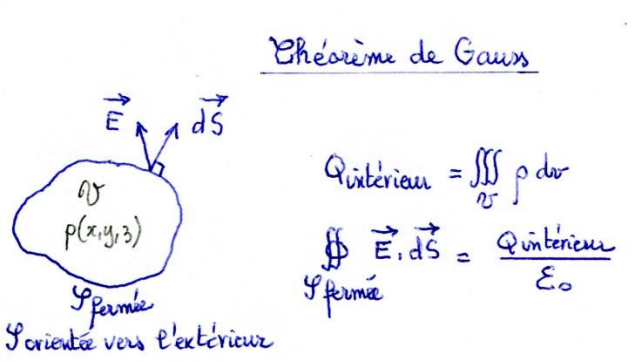
Elles sont tirées des équations locales par intégration sur l'espace via les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski.



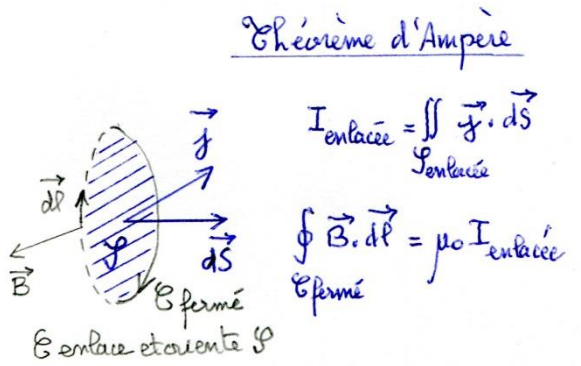
rot E = 0



div **B** = 0



Forme globale sur l'espace de div **E** = ρ/ε_0



Forme globale sur l'espace de **rot B** = μ_0 **j**

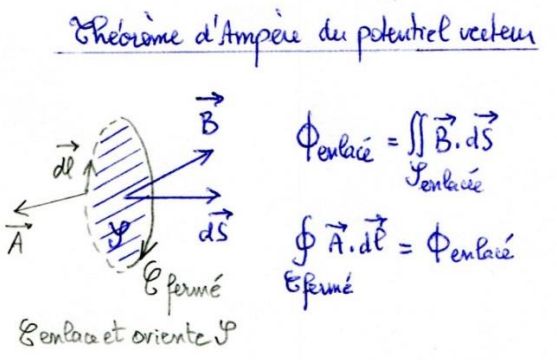
Ces deux formes sont très utiles en présence de symétries et d'invariances des charges et courants

5 – Potentiel scalaire V et potentiel vecteur A

E = - grad V (Volt)

B = rot A (Tesla m)

On choisit div **A** = 0 (Jauge de Coulomb)

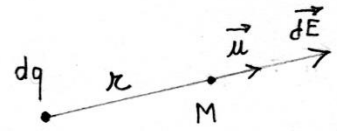


Equation de Poisson pour les potentiels en relation avec leurs sources :

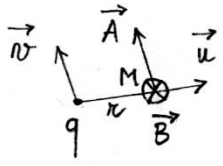
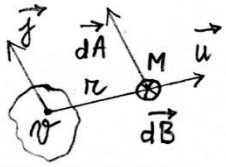
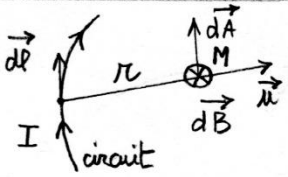
$\Delta V + \rho/\varepsilon_0 = 0$ Δ**A** + μ_0 **j** = **0**

Ces équations ont pour solution la formulation de Coulomb pour le potentiel électrique V (paragraphe 6) et de Biot et Savart pour le potentiel vecteur **A** (paragraphe 7) dont on déduit le champ électrique et le champ magnétique par **E = - grad** V et **B = rot A** (ce qui satisfait **rot E = 0** et div **B** = 0).

*6 - Les charges source de potentiel scalaire V et de champ électrique **E** via la loi de Coulomb*

	charge	distribution volumique	distribution surfacique	distribution linéique
Potentiel en M	$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho\, dv}{r}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\, dS}{r}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda\, dl}{r}$
Champ électrique en M	$\frac{q\,\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho\,\vec{u}\, dv}{r^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\,\vec{u}\, dS}{r^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda\,\vec{u}\, dl}{r^2}$
		$dq = \rho\, dv$	$dq = \sigma\, dS$	$dq = \lambda\, dl$

*7 - Les courants source de potentiel vecteur **A** et de champ magnétique **B** via la loi de Biot et Savart*

	charge de vitesse $\vec{v}$	distribution volumique	distribution surfacique	distribution linéique (circuit)
Potentiel en M	$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r}$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{j}\, dv}{r}$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{\vec{j}_s\, dS}{r}$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\, d\vec{l}}{r}$
Champ magnétique en M	$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\wedge\vec{u}}{r^2}$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{j}\wedge\vec{u}}{r^2} dv$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{\vec{j}_s\wedge\vec{u}}{r^2} dS$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\, d\vec{l}\wedge\vec{u}}{r^2}$
				

On peut vérifier que la jauge de Coulomb (div **A** = 0 est satisfaite).

8 – Symétries des champs

E est dans les plans de symétrie des charges ; **B** est orthogonal aux plans de symétrie des courants

B est dans les plans d'antisymétrie des courants

9 – conducteurs en équilibre électrostatique……magnétostatique

E = 0 ; ρ = 0 mais en surface σ ≠ 0 **B = 0** ; **j = 0** mais en surface **js** ≠ **0**

10 – champs sur la surface du conducteur (théorème de Coulomb)

E = σ/ε$_0$ **n** (normal à la surface) **B** = μ$_0$ **js** Λ **n** (tangent à la surface)

11 – Pression électrique/magnétique à la surface du conducteur

$P_e = \sigma^2 / 2\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \, E^2 / 2$ (Pascals) $\qquad P_m = \mu_0 \, j_s^2 / 2 = B^2 / 2\mu_0$

*12 – Relations de passage au travers d'une interface séparant deux milieux 1 et 2 et comportant des charges ou des courants surfaciques. **n** est la normale dirigée du milieu 2 vers le milieu 1.*

$E_{n1} - E_{n2} = \sigma/\varepsilon_0$ $\qquad B_{n1} = B_{n2}$

$\mathbf{E_{t1}} = \mathbf{E_{t2}}$ $\qquad \mathbf{B_{t1}} - \mathbf{B_{t2}} = \mu_0 \, \mathbf{j_s} \wedge \mathbf{n}$

13 - Moment dipolaire d'un ensemble de charges et moment magnétique d'une spire de courant

$\mathbf{P} = \Sigma \, q_i \, \mathbf{OA_i}$ (C m) avec $\Sigma q_i = 0$ $\qquad \mathbf{M} = I \, \mathbf{S}$ (A m²)

Pour 2 charges –q et +q, $\mathbf{P} = q \, \mathbf{A_-A_+}$ $\qquad$ **S** vecteur surface de la spire, I intensité

14 – Energie potentielle du dipôle, force et couple dans un champ <u>extérieur</u> au dipôle

$E_p = -\mathbf{P.E}$ (**E** champ extérieur) (Joule) $\qquad E_p = -\mathbf{M.B}$ (**B** champ extérieur)

$\mathbf{F} = \mathbf{grad}(\mathbf{P.E})$ (Newton) $\qquad \mathbf{F} = \mathbf{grad}(\mathbf{M.B})$

$\mathbf{C} = \mathbf{P} \wedge \mathbf{E}$ (Newton m) $\qquad \mathbf{C} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B}$

15 – Potentiel et champ créé par un dipôle à grande distance au point M

Dipôle en O, **u** vecteur unitaire selon **OM**, r = OM >> dimension du dipôle

$V = (1 / 4\pi\varepsilon_0) \, \mathbf{P.u} / r^2$ $\qquad \mathbf{A} = (\mu_0/4\pi) \, (\mathbf{M} \wedge \mathbf{u}) / r^2$

$E = -(1 / 4\pi\varepsilon_0) \, \mathbf{grad}(\mathbf{P.u} / r^2)$ $\qquad \mathbf{B} = -(\mu_0/4\pi) \, \mathbf{grad}(\mathbf{M.u} / r^2)$

16 – Energie potentielle d'une distribution de charges ou de courants

distribution	discrète	volumique	surfacique	linéique
Energie électrique	$\frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$	$\frac{1}{2} \iiint_{\text{charges}} \rho V \, d\tau$	$\frac{1}{2} \iint_{\text{charges}} \sigma V \, dS$	$\frac{1}{2} \int_{\text{charges}} \lambda V \, d\ell$
Energie magnétique	$\frac{1}{2} \sum_i I_i \phi_i$ ϕ_i flux magnétique	$\frac{1}{2} \iiint_{\text{courants}} \vec{j} \cdot \vec{A} \, d\tau$	$\frac{1}{2} \iint_{\text{courants}} \vec{j_S} \cdot \vec{A} \, dS$	$\frac{1}{2} \int_{\text{circuits}} I \, d\vec{\ell} \cdot \vec{A}$

Les intégrales sont calculées sur la portion d'espace occupée par les charges ou courants. V est le potentiel électrostatique local, **A** le potentiel vecteur local.

Application au condensateur de charge Q (surfaces au potentiel V_1 et V_2) : $E_p = ½ Q (V_1 – V_2)$

Application à une spire de courant traversée par le flux magnétique Φ : $E_p = ½ I Φ$

*17 – Densité d'énergie électrique et magnétique locale en un point M(x,y,z) de l'espace de champ électrique **E**(x,y,z) et magnétique **B**(x,y,z)*

Densité d'énergie électrique : $\varepsilon_0 E^2 / 2$ magnétique : $B^2 / 2\mu_0$

En Joule m^{-3}

L'énergie potentielle d'une distribution se calcule, contrairement au paragraphe 16, par intégration sur tout l'espace autour des charges et courants, **E** et **B** étant les champs créés par eux mêmes.

III – Champ de gravitation

Le champ newtonien de gravitation, en $1/r^2$, se traite par analogie au champ coulombien.

1 – Equations de Maxwell locales

div **G** = - 4π K ρ « Maxwell Gauss »

rot G = 0 « Maxwell Faraday »

Correspondance : champ de gravitation **G** ($m\ s^{-2}$) ↔ champ électrostatique **E** ($V\ m^{-1}$)

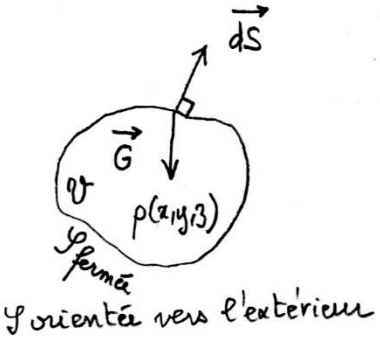
masse volumique ($kg\ m^{-3}$) ↔ densité de charge ($C\ m^{-3}$)

$- 4\pi K \leftrightarrow 1/\varepsilon_0$

$K = 6.67\ 10^{-11}$ SI constante d'attraction universelle

G est une accélération, la force attractive subie par une masse m dans le champ **G** est **F** = m **G**

2 – Equation globale sur une portion finie d'espace



Théorème de Gauss

$M_{intérieure} = \iiint_v \rho\, dv$

$\oint_S \vec{G}.\vec{dS} = -4\pi K M_{intérieure}$

S fermée

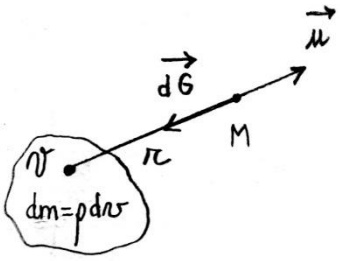
3– Potentiel de gravitation et équation de Poisson

G = - **grad** V, avec V obéissant à $\Delta V = 4\pi K \rho$, dont la loi de Newton est solution

L'énergie potentielle d'une masse m dans le potentiel de gravitation V est mV (Joules)

*4 - Les masses sont source de potentiel scalaire V et de champ de gravitation **G** via la loi de Newton*

	Masse ponctuelle	Distribution volumique
Potentiel en M	$-K\frac{m}{r}$	$-K\iiint_{\mathcal{V}}\frac{\rho\, d\mathcal{V}}{r}$
Champ de gravitation en M	$-K\frac{m\vec{u}}{r^2}$	$-K\iiint_{\mathcal{V}}\frac{\rho\vec{u}\, d\mathcal{V}}{r^2}$



IV – Régimes variables et induction magnétique dans un circuit

1 – Equations de Maxwell dans le vide ou dans un conducteur

Les charges ou **B** variable sont source de **E** :

div **E** = ρ/ε_0 (Maxwell Gauss)

rot E = - ∂**B**/∂t (Maxwell Faraday)

Les courants ou **E** variable sont source de **B** :

div **B** = 0 (Maxwell Thomson)

rot B = μ_0 **j** + μ_0 ε_0 ∂**E**/∂t (Maxwell Ampère)

avec **B = rot A**

E = - **grad** V - ∂**A**/∂t

2 – Loi locale de conservation de la puissance électromagnétique

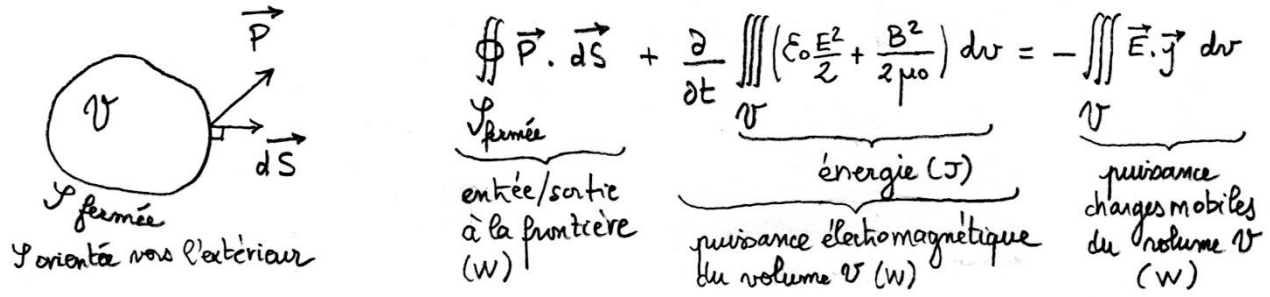
P = **E** Λ **B** / μ_0 vecteur de Poynting ou puissance transportée par unité de surface (W m^{-2})

div **P** + ∂**[** $\varepsilon_0 E^2/2 + B^2/2\,\mu_0$ **]**/∂t = - E.j

$\varepsilon_0 E^2/2$ densité d'énergie électrique, $B^2/2\,\mu_0$ densité d'énergie magnétique (J m^{-3})

E.j puissance volumique des charges mobiles soumises à la force de Lorentz (W m^{-3}), c'est la puissance dissipée par effet Joule si **j** et **E** sont liés par la loi d'Ohm.

3 – Loi globale pour une portion finie de l'espace



4 – Loi d'Ohm dans un conducteur et puissance Joule dissipée

j = γ **E**, où γ est la conductivité électrique (S m^{-1})

Puissance Joule par unité de volume : **E.j** = $\mathbf{j}^2/\gamma$ (W m^{-3})

Conducteur de section S et longueur L : I = j S, P = (j^2/γ) SL = $(L/\gamma S)$ I^2 = R I^2 (W) où R = L / γS

5 – ARQS dans un conducteur (approximation des régimes quasi stationnaires)

rot E = - ∂**B**/∂t **B** variable (donné) source de **E**

j = γ **E** loi d'Ohm, fournit le courant induit **j** à partir de **E**

rot B = μ_0 **j** fournit le champ magnétique induit à partir de **j**

div **j** = 0 implique div **E** = 0 et ρ = 0 (Maxwell Gauss) : un conducteur en ARQS est neutre

6 – Induction dans un élément de circuit AB de résistance R dans un champ magnétique variable

E = - **grad** V - ∂**A**/∂t avec **E** = **j**/γ donne $V_A - V_B$ = R I - e

Où $e = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A^B \boldsymbol{A}.\boldsymbol{dl}$ est la force électromotrice induite (Volt)

Dans le cas d'un circuit ouvert, I = 0, et $V_A - V_B$ = - e

Dans le cas d'un circuit fermé, A = B, I = e / R où e est donné par la loi de Faraday :

$e = -\frac{\partial}{\partial t}\oint \boldsymbol{A}.\boldsymbol{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dS} = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{B})}{\partial t}$ (via le théorème de Stokes)

Φ(**B**) est le flux magnétique (variable) au travers du circuit fermé.

7 – Induction dans un élément de circuit AB de résistance R en mouvement dans un champ magnétique constant

E = - **grad** V avec **j** = γ (**E** + **v** Λ **B**), loi d'Ohm généralisée, donne $V_A - V_B$ = R I – e

v vitesse de translation du circuit dans **B**

$e = -\frac{\partial \Phi c(\mathbf{B})}{\partial t}$ où $\Phi c(\mathbf{B}) = \iint \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dSc}$ est le flux coupé lors du déplacement du circuit.

dSc = **dOM** Λ **dl** est la surface balayée par l'élément de circuit **dl** dans son déplacement **dOM**

Dans le cas d'un circuit ouvert, I = 0, et $V_A - V_B = -e$

Dans le cas d'un circuit fermé, A = B, $I = e / R$

Le flux coupé est égal à la variation de flux magnétique au travers du circuit s'il est fermé.

8 – Loi de Lenz

Les effets de l'induction modèrent la cause qui leur a donné naissance.

9 – Inductance propre L d'un circuit

$\Phi = L\ I$

définit l'inductance propre L (Henry) du circuit d'intensité I générant le flux magnétique propre Φ au travers de lui-même

Bobine de section S, comportant N spires, de longueur l : $L = \mu_0\ N^2\ S / l$

10 – Circuit fermé de résistance R et inductance L soumis à un champ extérieur

Pour un circuit dans un champ extérieur $\mathbf{B_{ext}}$, $\Phi(\mathbf{B}) = L\ I + \iint \boldsymbol{B_{ext}}.\boldsymbol{dS}$

Equation électrique : $R\ I + L\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{B_{ext}}.\boldsymbol{dS} = 0$

Bilan de puissance : $R\ I^2 + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}LI^2) + I\ \frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{B_{ext}}.\boldsymbol{dS} = 0$

Où RI^2 = puissance Joule (W)

$\frac{1}{2}\ L\ I^2$ = énergie magnétique du circuit (J)

$I\ \frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{B_{ext}}.\boldsymbol{dS}$ = puissance échangée avec le champ extérieur (W)

11 – Inductance mutuelle entre deux circuits fermés 1 et 2

$\Phi_1 = L_1\ I_1 + M\ I_2$ = flux au travers du circuit 1 = flux propre 1 + flux mutuel de 2 dans 1

$\Phi_2 = L_2\ I_2 + M\ I_1$ = flux au travers du circuit 2 = flux propre 2 + flux mutuel de 1 dans 2

M inductance mutuelle (Henry) ; en influence totale, $M^2 = L_1\ L_2$

Deux équations électriques : $R_1\ I_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = 0\ \ et\ R_2\ I_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = 0$

Bilan de puissance : $R_1\ I_1^2 + R_2\ I_2^2 + \frac{\partial E_m}{\partial t} = 0$

Où $E_m = \frac{1}{2}\ I_1\ \Phi_1 + \frac{1}{2}\ I_2\ \Phi_2$ = énergie magnétique totale (J)

$R_1\ I_1^2 + R_2\ I_2^2$ = puissance Joule totale

V – Ondes électromagnétiques, partie A

1 – Equations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0$ et $\mathbf{j = 0}$)

div **E** = 0 (Maxwell Gauss)

rot E = - ∂**B**/∂t (Maxwell Faraday)

div **B** = 0 (Maxwell Thomson)

rot B = $\mu_0 \varepsilon_0$ ∂**E**/∂t (Maxwell Ampère) avec $\mu_0 \varepsilon_0 C^2 = 1$

Relations champ/potentiel :

B = rot A et **E** = - ∂**A**/∂t (pas de potentiel scalaire V en l'absence de charges)

2 – Equation de d'Alembert régissant les champs

Δ**E** = $\mu_0 \varepsilon_0$ ∂^2**E**/∂t^2, même équation pour **B** et pour **A**

Equation de propagation à la vitesse C ; si la direction de propagation est Ox, toute fonction des variables Ct – x ou Ct + x est solution, par exemple $e^{i(\omega t - kx)}$ ou $e^{i(\omega t + kx)}$ avec k = ω/C.

3 – Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) en $e^{i(\omega t - \mathbf{k.r})}$ et opérateurs

ω est la pulsation et **k** le vecteur d'onde de module $2\pi/\lambda$, direction de propagation

Les opérateurs deviennent en coordonnées cartésiennes :

grad = - i **k** (produit)

div = - i **k.** (produit scalaire)

rot = - i **k** Λ (produit vectoriel)

Δ = - k^2 (produit)

$\partial/\partial t$ = i ω (produit)

$\partial^2/\partial t^2$ = - ω^2 (produit)

4 – Structure de l'OPPH en $e^{i(\omega t - \mathbf{k.r})}$

div **E** = 0 → **k.E** = 0 **E** est transversal

rot E = - ∂**B**/∂t → **B** = **k** Λ **E**/ω (**k**, **E**, **B** forment un trièdre direct)

div **B** = 0 → **k.B** = 0 **B** est transversal

Δ**E** = $\mu_0 \varepsilon_0$ ∂^2**E**/∂t^2 → k = ω/C (relation de dispersion) → B = E/C

E = - ∂**A**/∂t → **E** = - i ω **A**, **E** et **A** colinéaires mais en quadrature de phase

$\mathbf{P} = \mathbf{E} \Lambda \mathbf{B} / \mu_0 = E^2 \mathbf{k} / \mu_0\omega = C \varepsilon_0 E^2 \mathbf{e_k}$ = vecteur de Poynting instantané, ou puissance instantanée transportée par l'onde par unité de surface (W m^{-2})

Densité d'énergie instantanée $\rho_E = \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0 = \varepsilon_0 E^2$ (J m^{-3}), on a $\mathbf{P} = C \rho_E \mathbf{e_k}$

Avec $E = |E| e^{i(\omega t - \mathbf{k.r})}$ et $B = |B| e^{i(\omega t - \mathbf{k.r})}$:

Densité d'énergie moyenne $\langle\rho_E\rangle = \frac{1}{2} [\varepsilon_0 \mathrm{Re}(EE^*)/2 + \mathrm{Re}(BB^*)/2\mu_0] = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2$

Puissance moyenne transportée $\langle P\rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(EB^*)/\mu_0 = \frac{1}{2} |E|^2/C\mu_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2 C = \langle\rho_E\rangle C$

L'énergie se propage à la vitesse C.

5 – Réflexion métallique des ondes transversales (indices i, r, pour incident, réfléchi)

Dans un conducteur parfait, $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$, donc sur la surface réfléchissante :

La composante tangentielle de **E** est nulle, donc $E_{i\ tan} + E_{r\ tan} = 0$ (projection sur l'interface)

La composante tangentielle de **B** est égale à $\mu_0 j_s$, donc $B_{i\ tan} + B_{r\ tan} = \mu_0 j_s$ ($B_i = E_i/C$, $B_r = E_r/C$), un courant surfacique j_s peut être présent. En réflexion vitreuse (isolant), j_s est par contre nul.

6 – Onde stationnaire selon Ox solution de $\partial^2E/\partial x^2 = (1/C^2)\ \partial^2E/\partial t^2$

On recherche les solutions par séparation des variables de la forme $E(x,t) = X(x)\ T(t)$

$T(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ et $X(x) = A' \cos(kx + \varphi')$ avec $k = \omega/C$

Modes d'ondes : imposés par la nature des conditions aux limites en x = 0 et x = L

Cavité oscillante : $\mathbf{E}(x,t) = X(x) e^{i\omega t} \mathbf{e_y}$ avec pour conditions aux limites $\mathbf{E}(0,t) = \mathbf{E}(L,t) = \mathbf{0}$

Modes permis : $k L = n \pi$ (n entier > 0), $\mathbf{E} = E_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \mathbf{e_y}$

On obtient **B** par $\mathbf{rot\ E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, soit $\mathbf{B}(x,t) = E_0/C \cos(kx) e^{i(\omega t+\pi/2)} \mathbf{e_z}$

Le vecteur de Poynting est à moyenne nulle, en sin(2ωt) : pas d'énergie propagée, $\langle\mathbf{P}\rangle = \mathbf{0}$

Comme $k = n \pi/L$ et $\omega = C k$, le champ final s'écrit sous forme d'une somme sur n :

$E(x, t) = \Sigma E_n \sin(n \pi x/L) \cos[n \pi C/L) t]$ pour n entier positif

A l'instant t = 0, si E(x, 0) est connu, les E_n sont les coefficients d'une série de Fourier impaire.

7 – Polarisation d'une onde

Polarisation linéaire: **E** et $\mathbf{B} = \mathbf{k} \Lambda \mathbf{E}/\omega$ vibrent dans deux directions fixes de l'espace

$\mathbf{E} = E_0 (0, \cos(\omega t-kx), 0)$ est polarisé selon Oy et $\mathbf{B} = E_0/C (0, 0, \cos(\omega t-kx))$ selon Oz

Polarisation circulaire: **E** et **B** sont la somme de deux polarisations linéaires orthogonales en quadrature de phase. ||**E**|| et ||**B**|| sont constants. L'extrémité des vecteurs **E** et **B** décrit un cercle.

$\mathbf{E} = E_0 (0, \cos(\omega t-kx), \sin(\omega t-kx))$ est polarisé circulairement à gauche.

E = E_0 (0, cos(ωt-kx), -sin(ωt-kx)) est polarisé circulairement à droite.

8 – Paquet d'onde

Superposition d'ondes centrées sur ω_0 et k_0

$$E(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega 0-\Delta\omega/2}^{\omega 0+\Delta\omega/2} E_0(\omega)e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})}\ d\omega$$

Où Δω est la largeur de bande autour de la pulsation centrale ω_0 ; k dépend de ω.

La loi exprimant k en fonction ω de s'appelle relation de dispersion.

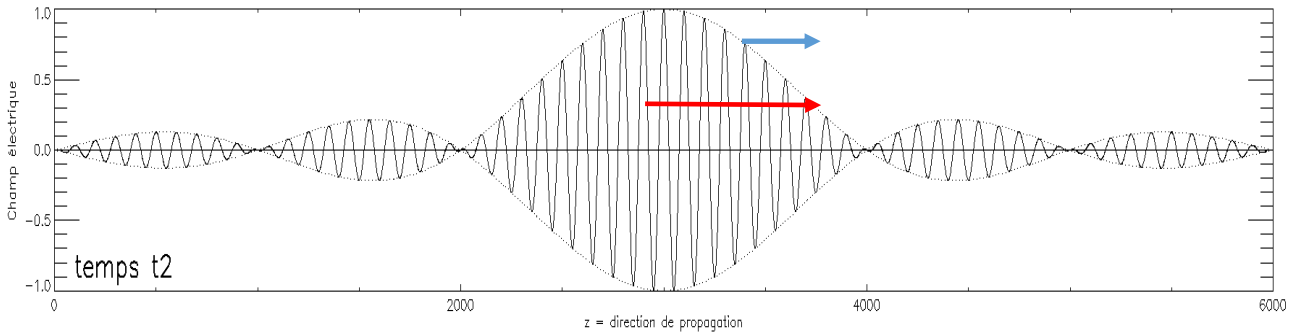
Ce paquet d'onde se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \omega_0 / k_0$

L'énergie se propage à la vitesse de groupe $v_g = (d\omega/dk)$ pour $\omega = \omega_0$, donc $\langle P\rangle = \langle \rho_E\rangle v_g$

Si E_0 est une constante, le paquet d'onde est une onde HF modulée par une enveloppe BF ; la vitesse de groupe est la *vitesse de propagation de l'enveloppe*, qui contient l'énergie.

Le milieu est dispersif lorsque v_φ et v_g dépendent de ω ; on a toujours $v_g < C$

$$v_g = \frac{v_\varphi}{1-\dfrac{\omega\ dv_\varphi}{v_\varphi\ d\omega}}$$



Paquet d'onde avec v_g en bleu (enveloppe BF) et v_φ en rouge (onde HF)

9 – Effet Doppler

La fréquence ν d'une onde émise par une source en déplacement, ou sa longueur d'onde λ, se décalent:

- vers les basses fréquences ν' ou grandes longueurs d'onde λ' quand la source s'éloigne (redshift)

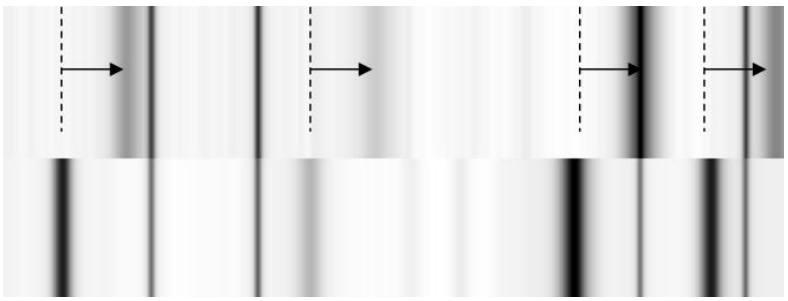
- vers les hautes fréquences ν' ou courtes longueurs d'onde λ' quand la source s'approche (blueshift)

selon les formules valables lorsque |v| < 0.1 C :

$(\nu' - \nu)/\nu = v/C$ et $(\lambda' - \lambda)/\lambda = - v/C$

v est la projection du vecteur vitesse sur la ligne de visée comptée positivement pour une approche

Lorsque la vitesse est une fraction appréciable de C, il faut utiliser la relativité restreinte.



Exemple de raies stellaires décalées par effet Doppler par rapport au spectre de raies solaires

10 – Onde guidée entre deux plans conducteurs infinis d'équation y = 0 et y = L se propageant dans la direction Oz

Champ électrique de la forme $\mathbf{E}(y,z,t) = E(y)\, e^{i(\omega t - kz)}\, \mathbf{e_x}$

E(y) est solution de l'équation de d'Alembert $\Delta E = \mu_0\, \varepsilon_0\, \partial^2 E/\partial t^2$ où $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$

Equation différentielle : $d^2E/dy^2 - k^2\, E = -\, (\omega^2/C^2)\, E$

S'écrit $d^2E/dy^2 + K^2\, E = 0$ en posant $K^2 = \omega^2/C^2 - k^2$

On impose E(0) = E(L) = 0 (condition de réflexion sur un plan conducteur)

D'où KL = n π, ce qui donne la relation de dispersion $k^2 = \omega^2/C^2 - n^2\, \pi^2/L^2$

n est entier et définit des modes discrets de propagation

De $E(y) = E_0 \sin(Ky)$,

On tire : $\mathbf{E}(y,z,t) = E_0 \sin(Ky)\, e^{i(\omega t - kz)}\, \mathbf{e_x}$, onde transversale, stationnaire en y, progressive en z

Si ω > πC/L, il existe au moins un mode progressif (k réel pur)

Si ω < πC/L, l'onde est absorbée (k imaginaire pur)

Vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{C}{\sqrt{1-\frac{n^2\pi^2C^2}{L^2\omega^2}}} > C$; vitesse de groupe $v_g = C\sqrt{1-\frac{n^2\pi^2C^2}{L^2\omega^2}} < C$

De sorte que $v_g\, v_\varphi = C^2$

L'onde est transverse électrique, mais non transverse magnétique (on détermine le champ magnétique par par **rot E** = - $\partial \mathbf{B}/\partial t$), et ne propage de l'énergie que selon Oz. Un courant de surface j_s apparaît sur les plans conducteurs à la réflexion.

Le champ électrique :

$E(y,z,t) = E_0 \sin(Ky) \cos(\omega t - kz) = \frac{1}{2} E_0 [\, \sin(\omega t + Ky - kz) - \sin(\omega t - Ky - kz)\,]$

est la superposition de 2 OPPH de vitesse C et de vecteurs d'onde

$\mathbf{k_1} = k\, \mathbf{e_z} - K\, \mathbf{e_y}$

$\mathbf{k_2} = k\, \mathbf{e_z} + K\, \mathbf{e_y}$

tels que $\|\mathbf{k_1}\| = \|\mathbf{k_2}\| = \omega/C$. Elles se réfléchissent sur les deux plans en se propageant selon Oz.

11 – Rayonnement dipolaire électrique à grande distance

Le rayonnement dipolaire électrique s'obtient à grande distance r du dipôle et à l'instant t par la théorie des potentiels retardés qui considère l'état du dipôle à l'instant (t - r/C) pour tenir compte du temps de propagation de la lumière.

Le potentiel vecteur à grande distance r de l'électron de charge -e est avec $\mathbf{p} = -e\,\mathbf{r}$:

$\mathbf{A} = (\mu_0 / 4\pi r)\ (-e\, d\mathbf{r}/dt) = (\mu_0 / 4\pi r)\ d\mathbf{p}(t-r/C)/dt$

On choisit $\mathbf{p} = -e\, a \cos(\omega(t - r/C))\ \mathbf{e_z}$ où a est l'amplitude de vibration

$\mathbf{A} = (\mu_0 / 4\pi r)\ \omega\, e\, a\ \sin(\omega(t - r/C))\ \mathbf{e_z}$

le potentiel scalaire V à grande distance r de l'électron est déduit de la jauge de Lorentz :

$\mathrm{div}\ \mathbf{A} + \mu_0\varepsilon_0\, \partial\mathbf{V}/\partial t = 0,$

ce qui donne au premier ordre en 1/r en coordonnées sphériques (r, Θ, φ) :

$V = -1 / (4\pi\, \varepsilon_0\, r)\ \mathrm{div}\ \mathbf{p}(t-r/C) = (\omega\, e\, a\ / 4\pi\varepsilon_0\, r\, C)\ \cos\Theta\ \sin(\omega(t - r/C))$

d'où l'on tire les champs électriques et magnétiques rayonnées à grande distance par les relations

$\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$

$\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}(V) - \partial\mathbf{A}/\partial t$

Soit :

$\mathbf{B} = (\mu_0 / 4\pi r)\ (\omega^2\, e\, a/C)\ \sin\Theta\ \cos(\omega(t - r/C))\ \mathbf{e}_\varphi$

$\mathbf{E} = (\omega^2\, e\, a/4\pi\varepsilon_0\, C^2\, r)\ \sin\Theta\ \cos(\omega(t - r/C))\ \mathbf{e}_\Theta$

$\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0 = (\omega^2\, e\, a/4\pi\varepsilon_0\, C^2\, r)^2\ \sin^2\Theta\ \cos^2(\omega(t - r/C)) / C\mu_0\ \mathbf{e}_r$

On a une structure d'onde plane d'amplitude décroissant en 1/r, **E**, **B** et **P** forment un trièdre.

La puissance moyenne rayonnée par unité de surface (W/m^2) est :

$\langle\mathbf{P}\rangle = \tfrac{1}{2}\ (\omega^2\, e\, a/4\pi\varepsilon_0\, C^2\, r)^2\ \sin^2\Theta / C\mu_0\ \mathbf{e}_r$

elle est nulle dans l'axe du dipôle (Θ =0, axe Oz), et maximale dans le plan orthogonal (Θ = π/2, plan xOy).

La puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace est l'intégrale de **P** sur un élément de surface sphérique $\mathbf{dS} = r^2 \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi\ \mathbf{e}_r$, pour Θ variant de 0 à π et φ variant de 0 à 2φ. On trouve :

$\langle P\rangle = \omega^4\, e^2\, a^2 / 12\pi\varepsilon_0\, C^3$ en Watt

Comme $d^2p/dt^2 = e\, a\, \omega^2 \cos(\omega(t - r/C))$, avec $\langle(d^2p/dt^2)^2\rangle = \tfrac{1}{2}\ (e\, a\, \omega^2)^2$, on a aussi l'expression

$\langle P\rangle = \langle(d^2p/dt^2)^2\rangle / 6\pi\varepsilon_0\, C^3$

P varie en ω^4 ou encore en $1/\lambda^4$ si λ désigne la longueur d'onde.

VI – Ondes électromagnétiques, partie B

1 – Ondes dans un milieu diélectrique Linéaire, Homogène et Isotrope (LHI), milieux transparents

div **D** = 0 avec ρ = 0, milieu neutre (Maxwell Gauss)

rot E = - ∂**B**/∂t (Maxwell Faraday)

div **B** = 0 (Maxwell Thomson)

rot B = μ_0 ∂**D**/∂t avec **j** = **0**, milieu isolant (Maxwell Ampère)

relations champs/potentiels : **B = rot A** et **E** = - ∂**A**/∂t

D = ε **E** = ε_0 **E** + **P** vecteur déplacement électrique en C m^{-2}

P = ε_0 χ **E** polarisation induite du milieu (ou moment dipolaire volumique en C m^{-2})

χ susceptibilité diélectrique (nombre complexe sans dimension)

ε = ε_0 ε_r = ε_0 (1 + χ) = ε_0 n^2 permittivité complexe du milieu, ε_r permittivité relative (sans dimension), n indice de réfraction complexe du milieu (sans dimension)

Relation de dispersion des ondes : k = (ω/C) n(ω), vecteur d'onde complexe

n(ω) = $n_1(\omega)$ – i $n_2(\omega)$ indice de réfraction complexe

n_1 indice de dispersion, n_2 indice d'absorption

v_φ = ω / Re(k) = C / $n_1(\omega)$ et v_g = dω / dRe(k) = C / (n_1 + ω $dn_1/d\omega$)

Onde évanescente de la forme $E(x,t) = E_0\ e^{-\boldsymbol{n_2}\omega x/C}\ e^{i\omega(t-\boldsymbol{n_1}x/C)}$ et B(x,t) = n E(x,t)/C

Aspect énergétique :

<P> = ½ Re(EB*)/μ_0 = ½ C ε_0 |E|² n_1 = ½ ε_0 |E|² C^2/v_φ où $|E|^2 = E_0^2\ e^{-2\boldsymbol{n_2}\omega x/C}$

et <∂ρ_E/∂t> = - <div **P**> = ε_0 ω n_2 n_1 $E_0^2\ e^{-2\boldsymbol{n_2}\omega x/C} \geq 0$ représente le dépôt d'énergie

si n_1 = 0, le milieu est absorbant (onde amortie), pas de transport d'énergie, <P> = 0

si n_2 = 0, le milieu est propagatif (onde progressive), transport sans dépôt d'énergie,

<P> = ½ C ε_0 $|E_0|^2$ n_1

si n_1 , $n_2 \neq 0$, onde évanescente, transport avec dépôt d'énergie

2 – Interaction onde/matière : l'oscillateur harmonique excité par une onde OPPH (partie A)

L'onde excitatrice est décrite par **E** = $\mathbf{E_0}\ e^{i\omega t}$

La matière est un ensemble d'oscillateurs harmoniques, électrons liés aux noyaux par la force de rappel – m ω_0^2 **r** et amortis par la force collisionnelle – m γ **v**.

v = d**r**/dt est la vitesse, **r** la position. γ = 1/τ est le coefficient d'amortissement (τ est le temps moyen entre deux collisions, environ 10^{-8} s).

La partie magnétique de la force de Lorentz, v B, où B = E/C, se néglige en supposant v << C.

Le PFD appliqué à un électron de masse m, charge –e s'écrit :

m d²**r**/dt² = – m γ d**r**/dt – m ω_0^2 **r** - e **E**

Pour des solutions du type **r** = $\mathbf{r_0}\, e^{i\omega t}$, on a **v** = d**r**/dt = i ω **r** et **a** = d²**r**/dt² = - ω² **r**, d'où

$$\boldsymbol{r} = \frac{-\frac{e}{m}\boldsymbol{E}}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i\,\gamma\omega}$$

Le vecteur polarisation **P** = - n e **r** = $\varepsilon_0\, \chi\, \mathbf{E}$ où n est la densité électronique (m^{-3}) définit la susceptibilité complexe du milieu :

$\chi = \frac{\omega_p^2}{-\omega^2+\omega_0^2+i\,\gamma\omega}$ où $\omega_p = \sqrt{\frac{n\,e^2}{\varepsilon_0\, m}}$ (pulsation plasma électronique)

Ordres de grandeur pour un électron lié en présence d'une onde lumineuse : $\omega_0 = 5\ 10^{16}$ rd/s, $\gamma = 10^8$ s^{-1}, $\omega = 4\ 10^{15}$ rd/s (lumière verte), en général ω_p << (ω, ω_0)

- Diffusion Thomson (électrons libres, $\omega_0 = 0$, $\gamma = 0$) : $\chi = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$
- Diffusion Rayleigh (électrons liés non amortis, $\omega << \omega_0$, $\gamma = 0$) : $\chi = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$
- Cas général : χ complexe avec $|\chi| << 1$
  $\chi = \chi_1 - i\,\chi_2$
  où $\chi_1 = \omega_p^2 \frac{(\omega_0^2-\omega^2)-i\,\gamma\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}$ et $\chi_2 = \frac{\omega_p^2\,\gamma\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}$

  définit un indice de réfraction complexe $n = \sqrt{1+\chi} = n_1 - i\,n_2 \approx (1 + \chi_1/2) - i\,(\chi_2/2)$
  L'onde est évanescente (indice n_2). Au voisinage de la pulsation de résonance ω_0 :
  $\chi_2 \approx \frac{\omega_p^2\gamma}{4\omega_0}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}$
  est une fonction de Lorentz présentant un pic centré sur ω_0 et de largeur à mi hauteur γ expliquant les raies spectrales atomiques d'absorption dans les étoiles ;
  au pic pour $\omega = \omega_0$, $\chi_2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} \approx 10^{-4} << 1$

3 – Interaction onde matière : bilan de puissance et section efficace d'interaction (partie B)

Le PFD multiplié par **v** et par n fournit la puissance des charges mobiles **E.j** où **j** = - n e **v** :

PFD : m d**v**/dt + m γ **v** + m ω_0^2 **r** = - e **E**, qu'on multiplie par – n e **v** :

m n **v** d**v**/dt + m n γ **v**² + m n ω_0^2 **r** d**r**/dt = **E.j**

La loi de conservation de la puissance volumique devient en reportant **E.j** ci-dessus :

$$\mathrm{div}(\mathbf{P}) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_0\frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\,mnv^2 + \frac{1}{2}mn\omega_0^2 r^2\right] = -nm\gamma v^2 < 0 \text{ (perte)}$$

où apparaissent énergie électrique, magnétique, cinétique, potentielle par unité de volume (J m^{-3})

Puissance rayonnée par l'électron dans tout l'espace

L'électron est un dipôle oscillant à la pulsation ω et de moment dipolaire **p** = - e **r**

On a vu précédemment qu'il rayonne dans tout l'espace la puissance

$<P_{ray}> = \frac{\mu_0}{6\pi C} < \left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)^2 >$ (unité : W)

Comme $\frac{d^2p}{dt^2} = -\omega^2 p$, et que la polarisation est n p = $\varepsilon_0 \chi$ E (moment dipolaire volumique),

$<P_{ray}> = \frac{\epsilon_0\, \omega^4}{12\pi C^3 n^2} |\chi|^2 E_0^2$ où E_0 est l'amplitude du champ électrique excitateur

Comme la puissance moyenne incidente de l'onde est $<P_{inc}> = ½\ \varepsilon_0\ E_0^2\ C$ (en W m^{-2}),

On introduit la section efficace σ d'interaction onde/matière (surface en m^2) par :

$\sigma = \frac{<P_{ray}>}{<P_{inc}>} = \frac{\omega^4}{6\pi C^4 n^2} |\chi|^2$

$\sigma = \frac{e^4}{6\pi C^4 \varepsilon_0^2 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}$

- Section efficace de <u>diffusion Thomson</u> ($\omega_0 = 0, \gamma = 0$) : $\sigma = \frac{e^4}{6\pi C^4 \varepsilon_0^2 m^2} = 6.63\ 10^{-29}\ m^2 = cte$
- Section efficace de <u>diffusion Rayleigh</u> ($\omega << \omega_0, \gamma = 0$) : $\sigma = \sigma_{Thomson} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} << \sigma_{Thomson}$
  Elle varie en $1/\lambda^4$, ce qui explique le bleu du ciel !
- Section efficace de <u>photoexcitation</u> ($\omega \approx \omega_0$) : $\sigma = ¼\ \sigma_{Thomson} \frac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}$
  A la pulsation de résonance, $\sigma = \sigma_{Thomson} \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} >> \sigma_{Thomson}$
  <u>Les raies spectrales</u> correspondent à une photoexcitation (absorption/émission d'un photon)

4 – Réflexion vitreuse sous incidence normale, coefficients de réflexion et de transmission

La composante <u>tangentielle</u> de **E** se conserve à la traversée de l'interface

La composante <u>tangentielle</u> de **B** se conserve aussi (car $j_s = 0$, milieu isolant)

La composante <u>normale</u> du vecteur de Poynting **P** se conserve

Quand on passe d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2, en incidence <u>normale</u> :

$r = E_r/E_i$; $t = E_t/E_i$ rapport amplitude onde réfléchie ou transmise à incidente

$r = (n_1-n_2)/(n_1+n_2)$; $t = 2n_2/(n_1+n_2)$ coefficients de réflexion et transmission en amplitude

$R = r^2$; $T = t^2\ (n_1/n_2)$ coefficients de réflexion et transmission énergétiques (R + T = 1)

$R = P_r/P_i$; $T = P_t/P_i$ rapport puissance réfléchie ou transmise à incidente

5 – Réflexion vitreuse sous incidence quelconque, incidence de Brewster

Dans le cas où le champ électrique **E** est dans le plan d'incidence, quand on passe d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2, avec i_1 angle d'incidence et i_2 angle de réfraction,

$r = (n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2) / (n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2)$

$t = 2\, n_1 \cos i_1 / (n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2)$ → formules de FRESNEL

Il existe toujours une incidence, dite de Brewster, telle que $r = 0$: $\tan i_1 = n_2/n_1$

Coefficients de réflexion et transmission énergétiques (R + T = 1) issus de la conservation de la composante normale du vecteur de Poynting :

$R = r^2 = (n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2)^2 / (n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2)^2$

$T = t^2 (n_2 \cos i_2 / n_1 \cos i_1)^2 = (4\, n_1\, n_2 \cos i_1 \cos i_2) / (n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2)^2$

Lorsque le champ électrique est orthogonal au plan d'incidence, les expressions de r et t sont différentes et l'incidence de Brewster n'existe pas ; une polarisation partielle apparaît.

Cas général lorsque n_2 est complexe (milieu absorbant ou métal) :

$\cos i_2$ est remplacé par le nombre complexe $cs = [\, 1 - n_1^2 \sin^2 i_1 / n_2^2 \,]^{1/2}$

$r = (n_2 \cos i_1 - n_1\, cs) / (n_2 \cos i_1 + n_1\, cs)$ et $t = 2\, n_1 \cos i_1 / (n_2 \cos i_1 + n_1\, cs)$

Si n_2 est réel, mais si cs est imaginaire pur (selon i_1), $|r| = 1$, il y a réflexion totale.

Si n_2 est imaginaire pur (absorption de l'onde transmise), cs est réel, $|r| = 1$, il y a réflexion totale.

6 – Ondes dans un plasma d'électrons mobiles

Conductivité d'un plasma peu collisionnel, de densité électronique n, en présence d'une onde de pulsation ω (m, -e masse et charge de l'électron, $m\, d\mathbf{v}/dt = -e\, \mathbf{E}$, $\mathbf{E}$ harmonique, $\mathbf{j} = \gamma\, \mathbf{E} = -n\, e\, \mathbf{v}$)

$\gamma = -i\, n\, e^2 / m\, \omega$ (imaginaire pur)

Equation de propagation en milieu conducteur (où $\mathbf{j} = -n\, e\, \mathbf{v} = \gamma\, \mathbf{E}$) :

$\mathbf{\Delta E} = \mu_0\, \gamma\, \partial \mathbf{E}/\partial t + \mu_0\, \varepsilon_0\, \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2$

La recherche d'une solution de type OPPH en $e^{i(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r})}$ fournit la relation de dispersion

$k^2 = \omega^2/C^2 - i\, \mu_0\, \gamma\, \omega = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2$, d'où $k = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}\, /\, C$

$\omega_p = \sqrt{\frac{n\, e^2}{\varepsilon_0\, m}}$ est la pulsation plasma (rd/s), c'est une pulsation de coupure :

Si $\omega < \omega_p$, il y a absorption de l'onde (k imaginaire pur)

Si $\omega > \omega_p$, il y a propagation (k réel pur), $v_\varphi = \frac{C}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > C$, $v_g = C \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < C$, $v_g\, v_\varphi = C^2$

Dans le cas $\omega > \omega_p$, avec $B = kE/\omega$:

$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\, \mathrm{Re}(EB^*)/\mu_0 = \frac{1}{2}\, |E|^2\, \mathrm{Re}(k)/\omega\mu_0 = \frac{1}{2}\, C\, \varepsilon_0\, |E|^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, |E|^2\, v_g$

$\langle \rho_E \rangle = \langle \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0 + \frac{1}{2}\, mn\, v^2 \rangle = \frac{1}{4}\, \varepsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{4}\, |B|^2/\mu_0 + \frac{1}{4}\, mn\, |v|^2$

Les électrons possèdent l'énergie cinétique volumique ½ mn v² (J m^{-3}), qui s'ajoute à l'énergie électromagnétique de l'onde, de sorte que :

$\partial \rho_E/\partial t + \text{div } \mathbf{P} = 0$

Comme $B = k E / \omega = \frac{E}{C}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ et $v = i\,(e / m\omega)\,E$,

$\langle \rho_E \rangle = ½\, \varepsilon_0\, |E|^2$ et $\langle P \rangle = \langle \rho_E \rangle\, v_g$

L'énergie est transportée à la vitesse de groupe.

Aspect diélectrique LHI du plasma :

Polarisation $\mathbf{P} = - n e \mathbf{r} = - n e \mathbf{v} /(i \omega) = - (n e^2 / m\omega^2)\, \mathbf{E} = - \varepsilon_0\, (\omega_p^2/\omega^2)\, \mathbf{E} \rightarrow \chi = - (\omega_p^2/\omega^2)$

Indice de réfraction du diélectrique : $n = \sqrt{1 + \chi} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$, et $k = n\, \omega/C$

n est réel ou imaginaire pur selon que $\omega > \omega_p$ ou que $\omega < \omega_p$

Dans le cas $\omega > \omega_p$: $v_\varphi = \frac{C}{n} > C$, $v_g = C\, n < C$

7 – Ondes dans un milieu conducteur de conductivité γ, effet de peau, absorption par effet Joule

$\mathbf{\Delta E} = \mu_0\, \gamma\, \partial \mathbf{E}/\partial t + \mu_0\, \varepsilon_0\, \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2$

La recherche d'une solution de type OPPH en $e^{i(\omega t - kx)}$ transversale se propageant selon Ox fournit la relation de dispersion

$k^2 = \omega^2/C^2 - i\, \mu_0\, \gamma\, \omega$

Si $\omega >> \gamma/\varepsilon_0$ (voisin de 10^{18} rd/s), l'aspect diélectrique domine et $k = \omega/C$

Si $\omega << \gamma/\varepsilon_0$, l'aspect <u>conducteur</u> domine et $k = (1 - i)/\delta$ où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0}}$ est <u>l'épaisseur de peau</u>

La relation $k = n\, \omega/C$ définit un indice de réfraction complexe $n = (1 - i)\sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\varepsilon_0}} = (1 - i)\, C/\delta\omega$

L'onde est évanescente et amortie sur la distance δ, c'est l'effet de peau.

Sa forme est $\boldsymbol{E}(x,t) = E_0\; e^{-x/\delta}\; e^{i(\omega t - x/\delta)}\, \mathbf{e_y}$

Comme $B = k E / \omega$, on obtient $\boldsymbol{B}(x,t) = \frac{\sqrt{2}E_0}{\delta\omega}\; e^{-x/\delta}\; e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})}\, \mathbf{e_z}$

La puissance moyenne transportée est : $\langle \mathbf{P} \rangle = ½\, \text{Re}(EB^*)/\mu_0 = \frac{{E_0}^2}{2\delta\omega\mu_0}\; e^{-2x/\delta}\, \mathbf{e_x}$ (W m^{-2})

La puissance moyenne injectée en x = 0, $\langle P(0) \rangle = \frac{{E_0}^2}{2\delta\omega\mu_0}$ (W m^{-2}) est dissipée par effet Joule,

car on vérifie que $\langle P(0) \rangle = ½ \int_0^\infty \gamma\, |E(x)|^2 dx$

où ½ γ |E|² désigne la puissance volumique Joule moyenne sur le temps (J m^{-3})

VII – Milieux magnétisés

1 – Equations de Maxwell généralisées à un milieu magnétisé LHI

div **D** = ρ (Maxwell Gauss)

rot E = - ∂**B**/∂t (Maxwell Faraday)

div **B** = 0 (Maxwell Thomson)

rot H = **j** + ∂**D**/∂t) (Maxwell Ampère)

relations champs/potentiels : **B = rot A** et **E** = - **grad**V - ∂**A**/∂t

B = μ **H**, **H** vecteur excitation magnétique (A m^{-1}), μ = μ_0 μ_r perméabilité magnétique du milieu

B = μ_0 **(H + J)**, avec **J** vecteur aimantation (A m^{-1}) ou moment magnétique par unité de volume

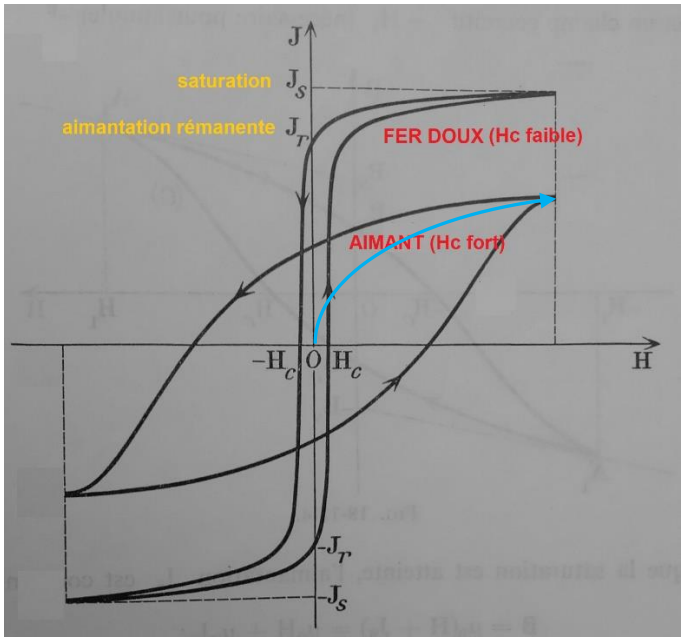
On pose **J** = χ **H,** χ susceptibilité magnétique (nombre sans dimension, dépend de H)

De ce fait, μ = μ_0 (1 + χ), μ_r = 1 + χ perméabilité relative du milieu (nombre sans dimension)

2 - Matériaux ferromagnétiques

Ils sont tels que χ >> 1 (plus de 1000 pour le fer)

Dans ce cas, J >> H. Soumis à une excitation magnétique H, ils acquièrent une aimantation permanente J = χ H, inférieure à une valeur de saturation J_{sat}. Lorsque l'excitation disparaît, il subsiste une aimantation rémanente J_r, qu'on peut annuler en renversant le sens de l'excitation. La valeur H_c de H qui annule l'aimantation J s'appelle champ coercitif. H_c est fort pour les aimants permanents mais faible pour le fer doux utilisé en courant alternatif. Le ferromagnétisme existe jusqu'à la température de Curie (1043 K pour le fer) ; au-delà, le matériau devient paramagnétique.



Cycle d'hystérésis J = f(H) pour le fer doux (H_c faible, de l'ordre de 50 Am^{-1}) et pour un aimant permanent (H_c fort, de l'ordre de 10000 Am^{-1}). J_{sat} est voisin de 10^6 A m^{-1}. Ci-dessous χ (lignes 2, 4) en fonction de H (lignes 1, 3) pour le fer, sa valeur maximale est voisine de 5000 pour H = 100 Am^{-1}. En bleu la courbe de 1ère aimantation.

20	40	60	80	120	200
1 200	2 060	3 000	5 000	5 330	4 140
400	800	8 000	24 000	80 000	240 000
2 580	1 460	180	66	21	7

Le fer doux (H_c faible) sert à amplifier un champ créé par une bobine magnétique (transformateur) ou à créer un électro aimant. Le fer dur (H_c grand) sert aux aimants permanents ou aux moteurs.

L'équation de conservation de la puissance volumique (W m^{-3}) est :

div **P** + **H**.∂**B**/∂t + **E**.∂**D**/∂t = - **E.j** = - j^2/γ (perte par effet Joule, loi d'Ohm **j** = γ **E**)

P = **E** Λ **H** vecteur de Poynting (puissance transportée en W/m^2)

Le travail des forces magnétiques par unité de volume (J m^{-3}) est donc dW = **H.dB**, il représente l'aire du cycle d'hystérésis (plus l'aire est faible, moins il y a de dissipation Joule, la perte est minimale pour le fer doux).

Exemple :

un solénoïde à N spires, longueur L, courant I, avec un noyau de fer doux de section S, d'axe Oz.

Le champ magnétique $B_0 = \mu_0$ N I/L (dans l'air) fournit l'excitation $H = B_0/\mu_0$ = N I/L ; dans le noyau de fer, $B = \mu_0 (1 + \chi) H = (1 + \chi) B_0 >> B_0$. Le champ peut ainsi être amplifié plus de 1000 fois. Comme H = B/μ, la force volumique f subie par le fer est donnée par dW = B.dB/μ = d(B^2/2μ) = f dz, d'où f = d(B^2/2μ)/dz.

A l'extrémité du noyau de fer (interface fer/air de section S), div **B** = 0 implique la continuité de la composante normale B_z. La pression magnétique dans l'air est ainsi $P = B_z^2/2\mu_0 = (1 + \chi)^2 B_0^2/2\mu_0$ et la force d'aimantation sur la section S est $F = S (1 + \chi)^2 B_0^2/2\mu_0$. La force varie comme $(1 + \chi)^2$, facteur pouvant atteindre 10^6. Elle peut provenir d'un courant I continu comme alternatif (B_0^2 dépend de I^2 de valeur moyenne jamais nulle).

3 - Matériaux paramagnétiques ou diamagnétiques

Il s'agit de l'apparition d'un moment magnétique non permanent, induit par le champ magnétique, lorsque $\chi << 1$. Dans ce cas, J << H et l'on a $H = B/\mu_0$ et $J = \chi B/\mu_0$

Diamagnétisme : $\chi < 0$, voisin de -10^{-4}

Paramagnétisme : $\chi > 0$, voisin de 10^{-3}

4 - Paramagnétisme de l'électron à deux états quantiques

Le moment magnétique orbital **M** de l'électron (masse m, charge -e) est relié à son moment cinétique orbital **L** par :

M = - μ_B **L**/$\hbar$ où μ_B est le magnéton de Bohr (μ_B = e $\hbar$ / 2 m = 9.27 10^{-24} Am^2 quantum de moment magnétique)

Il existe un moment magnétique de spin, tel que **M** = - g μ_B **S**/$\hbar$ (où g est le facteur de Landé).

Si l'électron est plongé dans un champ **B** = B $\mathbf{e_z}$, alors on a la quantification :

$S_z = m_s \hbar$ et M_z = - g m_s μ_B, où m_s est le nombre quantique magnétique (variant de -s à +s)

En présence de **B** = B $\mathbf{e_z}$, l'énergie est quantifiée par E = - **M.B** = - M_z B = g m_s μ_B B

Pour l'électron de spin s = ½, m_s = ±½, et l'on a g = 2. En présence de **B** = B $\mathbf{e_z}$, l'énergie de l'électron présente alors 2 états :

Etat 1, $M_z = \mu_B$, $E_1 = -\mu_B B$ (le plus peuplé)

Etat 2, $M_z = -\mu_B$, $E_2 = \mu_B B$

Les populations de ces deux états ne sont pas égales, mais données par la loi de Boltzman :

$N_1 = \alpha\, e^{-E_1/kT} = \alpha\, e^{\mu_B B/kT}$ et $N_2 = \alpha\, e^{-E_2/kT} = \alpha\, e^{-\mu_B B/kT}$

Où α est une constante de normalisation telle que $N_1 + N_2 = N$ densité électronique totale (m^{-3}), T la température (K) et k la constante de Boltzman ($1.38\ 10^{-23}$)

La somme des aimantations des populations est

$J = J_1 + J_2 = \mu_B N_1 - \mu_B N_2 = N \mu_B \tanh(\mu_B B / kT)$

Dans le cas où $\mu_B B << kT$, on obtient :

$J \approx N \mu_B^2 B / kT$ ($A\ m^{-1}$)

L'aimantation J varie en B/T (loi de Curie)

et comme $J = \chi B/\mu_0$, on trouve $\chi = N \mu_0 \mu_B^2 / kT > 0$ (paramagnétisme)

5 - Paramagnétisme du proton à deux états quantiques

Le proton (charge e, masse m_P) est aussi une particule de spin ½ à deux états lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique.

Son moment magnétique de spin est $\mathbf{M} = g \mu_P \mathbf{S}/\hbar$ (où $\mu_P = e \hbar / 2 m_P = 5.05\ 10^{-27}$ A m² est le magnéton du proton et g = 5.58 son facteur de Landé).

De ce fait, les deux états sont :

Etat 1, $M_z = (g/2) \mu_P$, $E_1 = -(g/2) \mu_P B$ (le plus peuplé)

Etat 2, $M_z = -(g/2) \mu_P$, $E_2 = (g/2) \mu_P B$

La transition entre les deux états (2 → 1) libère une énergie $\Delta E = h \nu = g \mu_P B$, d'où l'on déduit :

$\nu = g \mu_P B/h = 42.5\ B$ (ν en MHz avec B exprimé en Tesla).

Ce résultat est à l'oeuvre en imagerie médicale IRM : une onde radio par impulsion peuple régulièrement l'état 2, qui se désexcite naturellement en émettant sur la fréquence $\nu(x, y, z) = 42.5\ B(x, y,z)$ MHz, le patient étant plongé dans un champ B(x, y, z) non uniforme, ce qui permet de reconstituer une image 3D par analyse de l'origine spatiale des fréquences de désexcitation.