Cour de Mécanique
Deuxième Bac
Sciences Physique

Chute verticale d'un solide

Www.AdrarPhysic.Fr



Objectifs : *Connaissances et savoir-faire exigibles*

- *Définir un champ de pesanteur uniforme*
- *Connaitre les caractéristiques de la poussée d'Archimède*
- *Appliquer la deuxième loi de Newton à un corps en chute verticale dans un fluide et établir l'équation différentielle du mouvement, la force de frottement étant donnée.*
- *Connaitre le principe de la méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle*
- *Définir une chute libre, établir l'équation son équation différentielle et la résoudre*
- *Définir un mouvement rectiligne accéléré*
- *Savoir exploiter des courbes* $v_G(t)$ *pour :*
  - *Reconnaitre le régime transitoire et régime permanant*
  - *Évaluer le temps caractéristiques correspondant au passage d'un régime à l'autre*
  - *Déterminer la vitesse limite*
- *Dans le cas de la résolution par méthode itérative de l'équation différentielle , discuter la pertinence des courbes obtenus par rapport aux résultats expérimentaux*
  (choix du pas de résolution , modèle proposé pour la force de frottement)

1- Chute verticale avec frottement

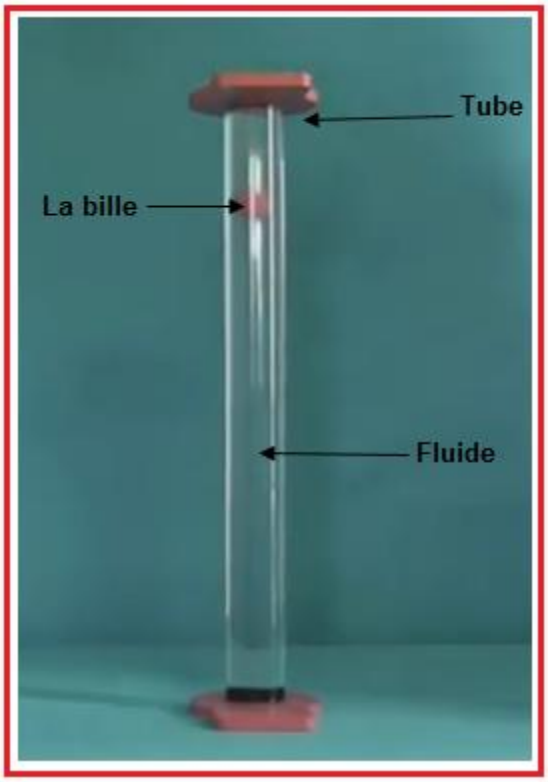
1-1- Etude expérimentale

1-1-1- But de l'expérience

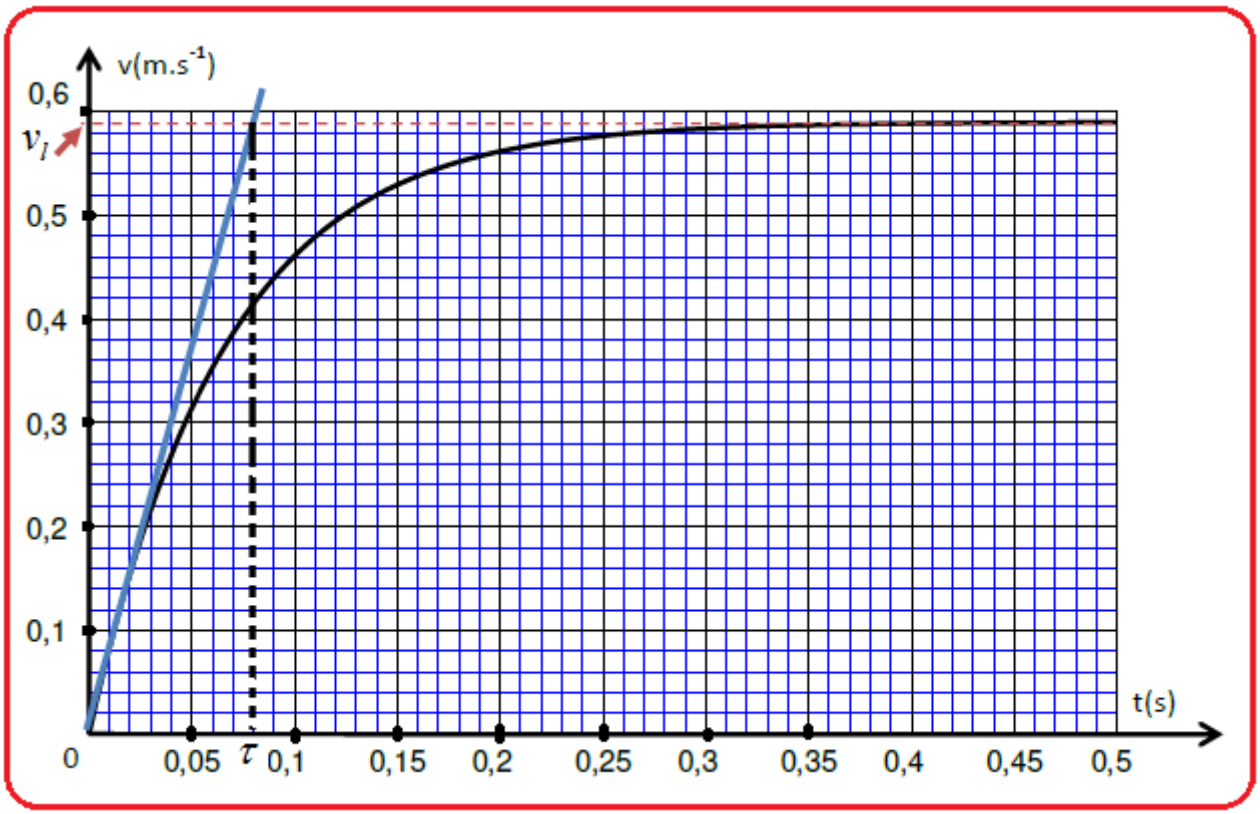
Modélisation de la chute d'une bille dans un liquide par la méthode d'Euler

1-1-2- Activité

Dans un tube contenant un fluide de masse volumique ρ_f ,on lance sans vitesse initiale une bille (B) de masse m et de masse volumique ρ.
à l'aide d'un système informatisée on enregistre le mouvement de la bille ,et on trace le graphe représentant la variation de la vitesse v de la bille en fonction du temps t



1-1-3- Le graphe $v = f(t)$



1-2- Etude théorique

1-2-1- L'équation différentielle du mouvement

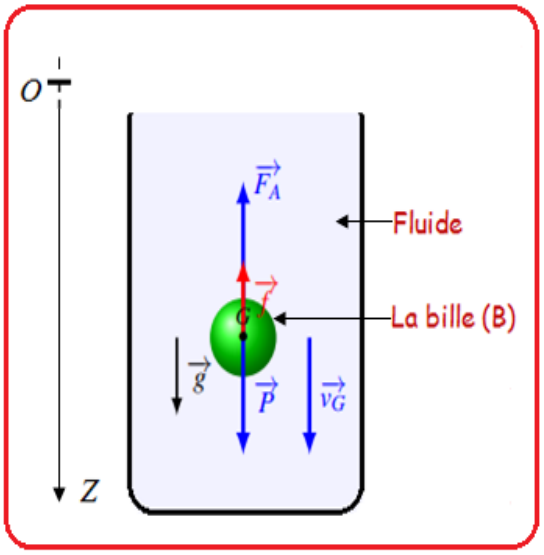
- Système étudié :la bille (B)
- Référentiel : $R(O,z)$
- Bilan des forces :
  - $\vec{P}$: poids de la bile : $\vec{P} = m.\vec{g}$
  - $\vec{F}_a$:la poussée d'Archimède

C'est la force appliquée par un fluide sur un corps solide émergé totalement ou Partiellement dans le fluide.

tel que : $\vec{F}_A = -m_f.\vec{g} = -\rho_f.V.\vec{g}$

ρ_f :masse volumique du fluide déplacé

V : le volume du fluide déplacé =volume



- $\vec{f}$:force de frottement du fluide

Tout solide en mouvement dans un fluide subit de la part du fluide (gaz ou liquide) une force $\vec{f}$ qui s'oppose à son mouvement, cette force a une valeur d'autant plus grande que la vitesse est important.

Appelée : force de frottement fluide

tel que : $\vec{f} = -k.\vec{v}_G^{\,n}$

$n=1$: si la vitesse est de valeur petite la constante k dépond de la viscosité du Fluide donc : $f = kv$

$n=2$: si la vitesse est de valeur élevée la constante k dépond de la masse Volumique du fluide

donc : $f = kv^2$

- Application du PFD

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\vec{a}_G$$

- Projection de la RFD

Sur l'axe OZ : $P - f - F_A = ma_G$

$$mg - kv_G^n - \rho_f.V.g = ma_G = m\frac{dv_G}{dt} \Rightarrow (m - m_f)g - kv_G^n = m\frac{dv_G}{dt}$$

$$\frac{dv_G}{dt} = \left(\frac{m - m_f}{m}\right)g - \frac{k}{m}v_G^n$$

On pose : $A = \left(\frac{m - m_f}{m}\right)g$ et $B = \frac{k}{m}$

Www.AdrarPhysic.Fr

donc l'équation différentielle est de la forme : $\frac{dv_G}{dt} = A - B.v_G^n$

1-2-2- Les grandeurs caractéristiques du mouvement

a- Le régime permanent - vitesse limite.

L'étude expérimentale montre que la vitesse du centre d'inertie de la bille tend vers une valeur limite v_l appelée vitesse limite.

- Graphiquement la valeur de v_l est l'ordonnée du point d'intersection de l'asymptote et l'axe des ordonnées. on trouve $v_l = 0{,}59 m.s^{-1}$
- Lorsque la vitesse limite est atteinte , la bille chute à vitesse constante ,tel que $\frac{dv}{dt} = 0$ et d'après l'équation différentielle on a :

$$\frac{dv_G}{dt} = \frac{dv_l}{dt} = 0 = A - Bv_G^n \Rightarrow A = Bv_l^n \Rightarrow v_l^n = \frac{A}{B}$$

$$\boldsymbol{v_l = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(g.\frac{m-m_f}{k}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(g.\frac{\rho-\rho_f}{k}.V\right)^{\frac{1}{n}}}$$

La constante de la vitesse du centre d'inertie de la bille caractérise le régime permanent . L'expression de v_l montre qu'elle dépend de la masse volumique de la bille et du liquide .

b- Le régime initial : l'accélération initial

- L'expression de a_0

à $t = 0$, $v_0 = 0$ et l'accélération initiale est : $a_0 = \left(\frac{dv_G}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{m-m_f}{m}\right)g - \frac{k}{m}v_0^n$

$$\boldsymbol{a_0 = \left(\frac{m-m_f}{m}\right).g}$$

a_0 :est appelée accélération initiale du mouvement de la bille

- Graphiquement

  a_0 représente la ponte de la tangente à $t = 0$ donc

  $a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,3-0}{0,04-0} = 7{,}5 m.s^{-1}$ D'où $a_0 = 7{,}5 m.s^{-1}$

c- Le temps caractéristique du mouvement.

- Graphiquement

  L'asymptote et la tangente à la courbe à $t = 0$ se coupent en un point d'abscisse τ appelé temps caractéristique du mouvement. Donc : $\tau = 0{,}08 s$
- Par calcul

  La valeur de τ est donnée par la relation :

  $\tau = \frac{v_l}{a_0} = \frac{0,59}{7,5} = 0{,}078$ D'où : $\tau \approx 0{,}08 s$

Www.AdrarPhysic.Fr

1-2-3- Résolution numérique par la méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet de résoudre numériquement l'équation différentielle. Pour l'utiliser, il faut connaître la vitesse à une date donnée .Cette méthode comporte deux étapes de calcul qu'il faut répéter dans le temps. C'est une méthode itérative.

- En général, c'est la vitesse initiale v_0 qui est connue (à la date t_0)
- Première étape : On calcule l'accélération a_0 à la date t_0.

  L'équation différentielle permet de connaître l'accélération initiale a_0 à la date t_0 :

  $$a_0 = A - B.v_0^n$$
- Deuxième étape : On calcule la vitesse v_1 à la date $t_1 = t_0 + \Delta t$ La durée Δt est appelée le pas du calcul. $a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t}$

  Soit : $v_1 = v_0 + a_0.\Delta t$

  On recommence ces deux étapes de calculs (voir le tableau ci-dessous) :

Date	Vitesse	Accélération
$t_0 = 0$ ↓	v_0	→ $a_0 = A - B.v_0^n$ ↓
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0.\Delta t$ ↓	→ $a_1 = A - B.v_1^n$ ↓
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1.\Delta t$	↓ $a_2 = A - B.v_2^n$

On opère par tâtonnement en cherchant les valeurs de A , B et n qui permettent de faire coïncider les valeurs calculées par méthode d'Euler avec les valeurs expérimentales :
La courbe théorique doit coïncider avec la courbe expérimentale .
Le choix du pas de calcul Δt est déterminant ; en effet un pas trop grand donne des résultats aberrants, et un pas trop petit augmente considérablement le nombre d'opération à effectuer . en général en prend $\Delta t = 0{,}1.\tau$.

2- Chute libre verticale d'un solide sans vitesse initiale

2-1- Définition

La chute libre est le mouvement vertical effectué par un corps lorsqu'il ne subit que l'effet de la force gravitationnelle (le poids)



2-2- Etude expérimentale de la chute libre verticale

2-2-1- Activité

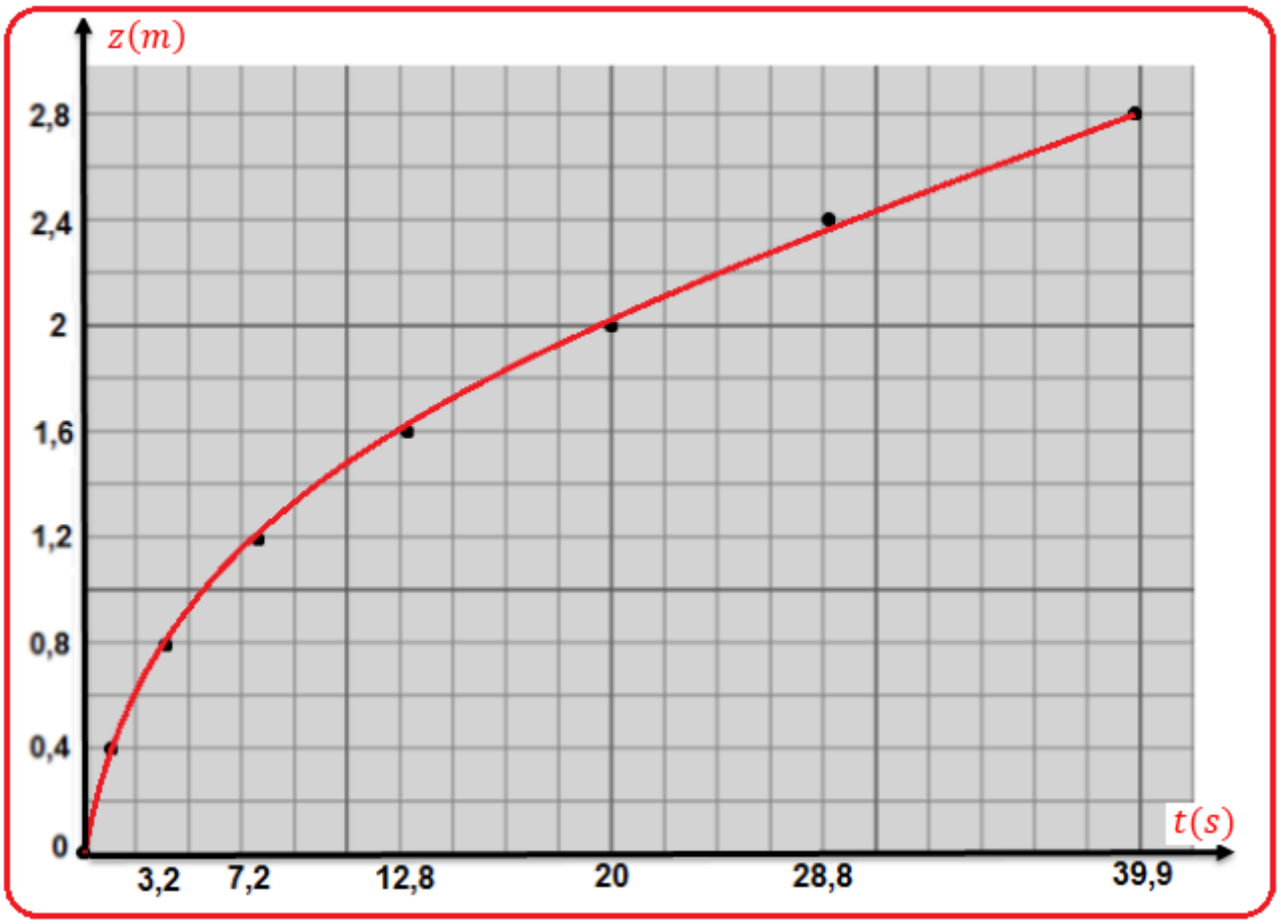
En faisant varier la hauteur z et à chaque fois on prend la date t A l'aide d'un chronomètre,

puis à chaque date on calcul la vitesse instantanée v

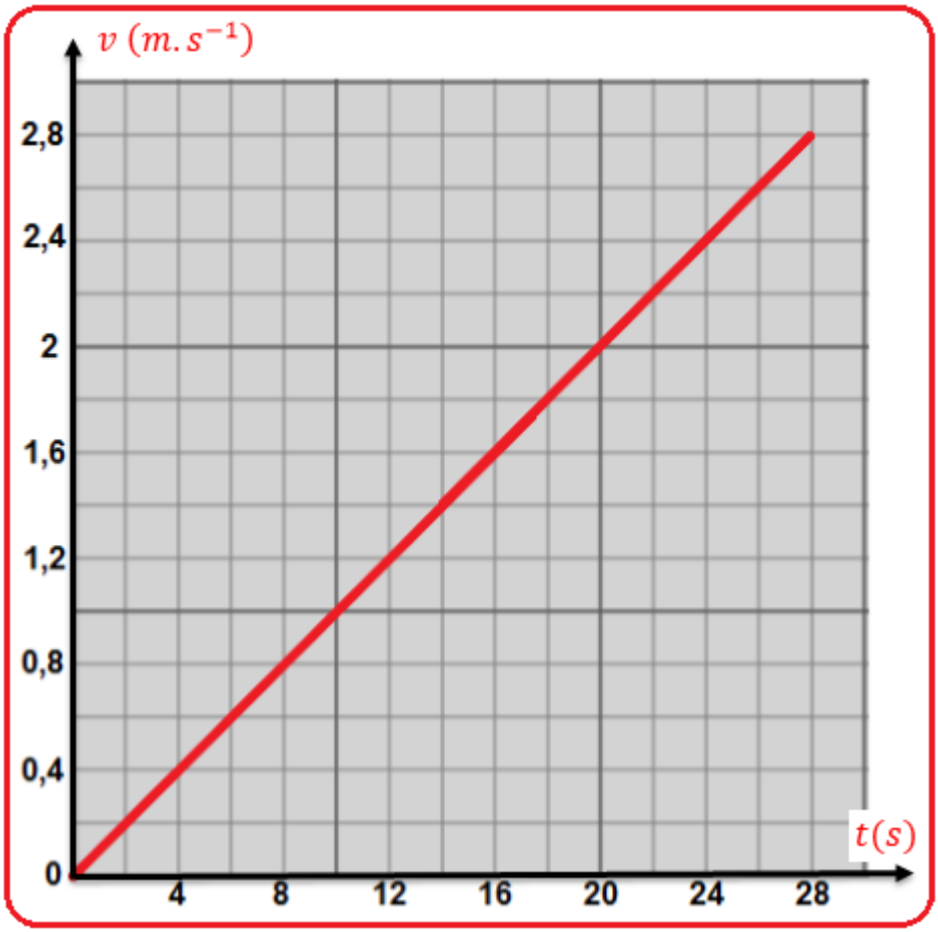
2-2-2- Tableau de mesures

Date : t (ens)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
Hauteur z $(en\ m)$	0	0,8	3,2	7,2	12,8	20	28,8	39,9
Vitesse (en $m.s^{-1}$)	0	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0	28,0

2-2-3- Les graphes : $z = f(t)$, $v = f(t)$



Www.AdrarPhysic.Fr



2-2-4- Observations

- Le graphe $z = f(t)$ est une fonction parabolique d'équation : $z = k'.t^2$ (1)
- Le graphe $v = f(t)$ est une fonction linéaire : $v = k.t$
  La constante k représente la ponte de la droite sa valeur est $k = 10m.s^{-2}$ c'est l'accélération de pesanteur Donc : $v = g.t$ (2)

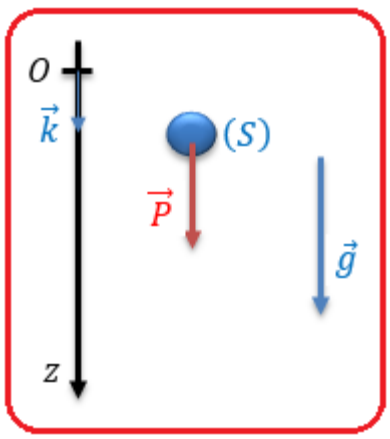
2-2-5- Conclusion

D'après les relations (1) et (2) le mouvement de chute libre est rectiligne uniformément varié d'équations horaire :

$$a = g \quad , \quad z = \frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.t + z_0 \quad et \quad v = g.t + v_0$$

2-3- Etude théorique de la chute libre

On lance un corps (S) à partir de l'origine O sans vitesse initiale



2-3-1- Nature du mouvement

- Système étudié : le corps (S)
- Le repère : $(O, \vec{k})$
- Bilan de forces ; le poids $\vec{P} = m.\vec{g}$
- Application de la deuxième loi de Newton (RFD)

$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$

C'est-à-dire : $\vec{P} = m.\vec{a} = m.\vec{g}$ donc : $\vec{a} = \vec{g}$ (1)

- Projection de la relation (1)

$\vec{g} = g\vec{k}$

L'accélération est une constante donc le mouvement est rectiligne uniformément varié

2-3-2- Equations horaire du mouvement

a- Accélération $a = g$

b- La vitesse

$\frac{dv}{dt} = a = g \quad \Rightarrow \quad dv = g.dt \quad \Rightarrow \int dv = \int g.dt \quad \Rightarrow \quad v = gt + C$

$signification\ physique\ de\ la\ constante$:

à $t = 0$ on a : $v(t=0) = v_0 = g.0 + C$

Donc : $C = v_0 = 0$ D'où : $v = gt$ (1)

c- L'abscisse

On a : $v = \frac{dz}{dt} = gt + v_0 \quad \Rightarrow \quad dz = gtdt + v_0 dt$

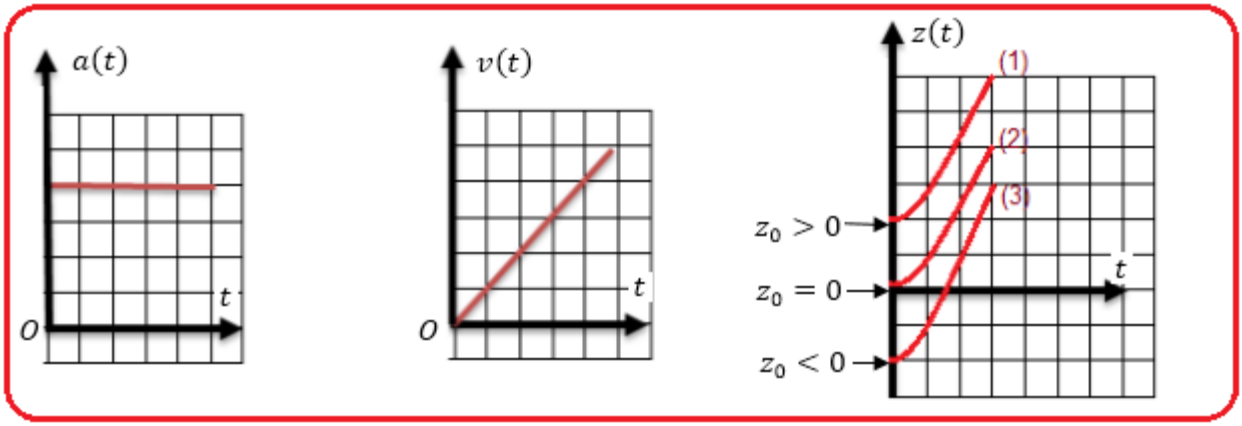
Donc : $\int dz = \int gtdt + \int v_0 dt \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}.g.t^2 + C$

Pour la signification physique de la constante C

à $t = 0$ on a : $z(t=0) = z_0 = g.0 + C$ Donc : $C = z_0$

D'où : $z = \frac{1}{2}.g.t^2 + z_0$ (2)

2-3-3- Représentation graphique



Www.AdrarPhysic.Fr