



1^{ère} Série des TDs (avec réponses détaillées et commentées)

Exercice 1 :

Calculer toutes les dérivées partielles des fonctions à plusieurs variables suivantes:

a) $F(x, y) = a + 3x^2 + \ln(y)$

b) $G(x, y) = \ln(x/y)$

c) $H(x, y) = \cos(x + y)$

Exercice 1 : Solution détaillée

a)

$$F(x, y) = a + 3x^2 + \ln(y)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = 0 + 6x + 0 = 6x$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = 0 + 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x} (6x) = 6$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y}\right)_x = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y}\right)_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y} (6x)_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

b)

$$G(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_x = 0 - \frac{1}{y} = -\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-1}{y} \right) = \frac{1}{y} \\
 * \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-1}{y} \right) = 0 \\
 * \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \\
 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 * H(x+y) &= \cos(x+y) \\
 * \frac{\partial H}{\partial x} &= -\sin(x+y) ; * \frac{\partial H}{\partial y} = -\sin(x+y) \\
 * \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= -\cos(x+y) ; * \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -\cos(x+y) \\
 * \frac{\partial H}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-\sin(x+y)) \\
 &= -\cos(x+y) \\
 * \frac{\partial H}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-\sin(x+y)) = -\cos(x+y)
 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Calculer la différentielle totale de la fonction $f(x, y, z) = 4x + 3y^2 + 4xyz$

Exercice 2 : Solution détaillée

$$\begin{aligned}
 df(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y} dz \\
 df(x, y, z) &= (4 + 0 + 4yz).dx + (0 + 6y + 4xz).dy + (0 + 0 + 4xy).dz \\
 df(x, y, z) &= 4(1 + yz).dx + 4\left(\frac{3}{2}y + xz\right).dy + 4xyz.dz \\
 df(x, y, z) &= 4(1 + yz).dx + 4\left(\frac{3}{2}y + xz\right).dy + 4xyz.dz
 \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit une fonction $U(x, y) = ax + c/(y - b)$ où a, b et c des constantes. Déterminer la forme différentielle de $U(x, y)$.

Exercice 3 : Solution détaillée

$$\begin{aligned}
 dU(x, y) &= \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right)_y . dx + \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right)_x . dy \\
 \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right)_y &= a \text{ et } \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right)_x = \frac{-c}{(y-b)^2} \\
 dU(x, y) &= a . dx - \frac{c}{(y-b)^2} . dy
 \end{aligned}$$

Remarque: On peut aisément vérifier que dU est une différentielle totale exacte

Exercice 4 :

Au laboratoire des TPs, on a mesuré une petite variation δQ d'une quantité de chaleur Q en fonction de 2 grandeurs variables x et y . On a trouvé que δQ s'exprime de la forme suivante : $\delta Q = a . dx + \frac{cx}{y-b} . dy$

Vérifiez si δQ est une différentielle totale exacte au sens mathématique du terme

Exercice 4 : Solution détaillée

$$\delta Q = a \cdot dx + \frac{c \cdot x}{y-b} \cdot dy$$

$$\delta Q = A(x, y)dx + B(x, y) \cdot dy \quad \text{avec: } A(x, y) = a \quad \text{et} \quad B(x, y) = \frac{c \cdot x}{y-b} \quad \text{où } c \neq 0$$

$$\delta Q \text{ est une différentielle totale exacte si: } \left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right)_y$$

or : $\left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} \right)_x = 0$ et $\left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right)_y = \frac{c}{y-b}$, donc: $\left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} \right)_x \neq \left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right)_y$ et par conséquent δQ n'est pas une différentielle totale exacte.

Exercice 5 :

Les coefficients thermoélastiques permettent de caractériser le comportement de la matière constituant un système thermodynamique donné pendant la variation de la température ou de la pression. On peut définir au moins 3 coefficients thermoélastiques différents:

- Le coefficient de dilatation volumique isobare (α_v ou α). Il représente la variation relative de volume résultant d'une variation de température à pression constante. Il s'exprime en K^{-1} : $\alpha_v = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$
- Le coefficient de variation de pression isochore (α_P ou β). Il représente la variation relative de pression résultant d'une variation de température à volume constant. Il s'exprime également en K^{-1} : $\alpha_P = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$
- Coefficient de compressibilité isotherme (k_T ou χ). Il représente la variation relative du volume résultant d'une variation de pression à température constante. Il s'exprime en Pa^{-1} : $k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$

1. Considérons un fluide décrit par une équation d'état de la forme $f(P, V, T) = 0$, montrez que les coefficients thermoélastiques de ce fluide sont liés par une relation telle que: $\alpha_v = \alpha_P \cdot k_T \cdot P$ où P est la pression du fluide exprimée en Pascal (Pa).

2. Calculer les 3 coefficients thermoélastiques dans le cas où le fluide considéré est un gaz parfait. Vérifiez alors la validité de la relation générale qui lie les 3 coefficients ($\alpha_P \cdot k_T \cdot P = \alpha_v$) dans ce cas particulier.

3. Des mesures expérimentales effectuées au laboratoire des TP ont montré que le coefficient de dilatation volumique isobare α_v et celui de compressibilité isotherme k_T d'une mole d'un gaz s'expriment, en fonction des variables indépendantes pression P et température T , par les relations suivantes: $\alpha_v = \frac{R}{R \cdot T + b \cdot P}$ et $k_T = \frac{R \cdot T}{P \cdot (R \cdot T + b \cdot P)}$ où R et b sont des constantes. Trouvez l'équation d'état de ce gaz, relative à une mole.

Exercice 5 : Solution détaillée

5-1. Rappel du paragraphe 4 du 1^{er} chapitre du cours intitulé **Relations liant les dérivées partielles**

Soit $f(x, y, z) = 0$ une fonction à trois variables. Les variations de cette fonction sont totalement décrites à partir des variations de deux variables seulement; la troisième se déduisant des deux autres par la relation $f(x, y, z) = 0$.

Chacune des 3 variables x , y et z peut être considérée comme une fonction des deux autres qui deviennent les variables indépendantes: $f(x, y, z) = 0 \Rightarrow x = x(y, z)$ et $y = y(x, z)$ et $z = z(x, y)$

Dans ce cas, on peut facilement montrer les 2 relations suivantes (voir démonstration dans le cours):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y}$$

et

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1 \quad (1.7)$$

Puisque l'équation d'état du fluide est de la forme $f(P, V, T) = 0$, on peut donc appliquer les 2 relations ci-dessus. Ainsi:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \times \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1$$

$$\times \frac{\partial V}{\partial} = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT$$

$$\times \frac{\partial P}{\partial} = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT$$

$$\partial V = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left(\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT$$

$$\partial V = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dT$$

∀ V et T. Donc:

$$\times \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = 1$$

$$\times \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$= - \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}_P}$$

Faites très attention: Dans ces relations, il faut absolument remplacer ∂V par dV et ∂P par dP . Sinon, elles seront fausses. Il faut écrire $dV = \dots$ à la place de $\partial V = \dots$ et $dP = \dots$ à la place de $\partial P = \dots$

Car $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \times \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = 1$

$$\Rightarrow \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_P \times \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1 \right\}$$

5-2.

* On a: $\alpha = \frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

$$\chi = -\frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Montrer que: $\frac{\chi \times \beta}{\alpha} = \frac{1}{P}$

$$\frac{\chi \times \beta}{\alpha} = \frac{-\frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \frac{1}{P} \times \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V}{\frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P} = - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \frac{1}{P} \times \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V}{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}$$

$$\times \frac{\partial T}{\partial V}_P$$

$$\frac{\chi \times \beta}{\alpha} = -\frac{1}{P} \times \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \times \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \right]$$

$$\frac{\chi \cdot \beta}{\alpha} = -\frac{1}{P} \cdot (-1) = \frac{1}{P} \quad \text{Donc:} \quad \frac{\chi \cdot \beta}{\alpha} = \frac{1}{P}$$

α est le coefficient de dilatation isobare. C'est -à-dire le coefficient de dilatation à pression constante

Ainsi, on montre bien que les coefficients thermoélastiques du fluide sont liés par relation:

$$\alpha_v = \alpha_p \cdot k_T \cdot P \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha_v, \beta = \alpha_p \text{ et } \chi = k_T$$

5-3.

pour un gaz parfait:

$$\alpha = \frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \times \frac{V}{T} = \frac{1}{T}$$

$$\beta = \frac{1}{P} \times \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{P} \times \frac{P}{T} \times \frac{1}{T}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \times \left(-\frac{V}{P} \right) = \frac{1}{P}$$

$$\frac{\chi_T \times \beta}{\alpha} = \frac{\frac{1}{P} \times \frac{1}{T}}{\frac{1}{T}} = \frac{1}{P}$$

$$\alpha = \frac{R}{RT+bP} = \frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\chi = \frac{RT}{P(RT+bP)} = -\frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{RV}{RT+bP}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP$$

$$P = \text{cte} \Rightarrow dP = 0$$

$$* dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT$$

$$* \partial V = \frac{RV}{RT+bP} \times dT \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{R}{RT+bP} dT$$

$$\Rightarrow \ln V = \ln(RT+bP) + C(P)$$

$$\text{soit } C(P) = \ln f(P)$$

$$\boxed{V = f(P)(RT+bP)}$$

$$\chi = -\frac{1}{V} \times \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\chi V$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{\partial f}{\partial P} (RT+bP) + f(P) \times \frac{\partial}{\partial P} (RT+bP)_T$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T &= \frac{\partial f}{\partial P} (RT+bP) + f(P) \times b \\ &= -\chi V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T &= -XV = - \left[\frac{RT}{P(RT+bP)} \right] \left[f(P)(RT+bP) \right] \\ &= - \frac{RT}{P} \times f(P) \\ \frac{\partial f}{\partial P} (RT+bP) + b f &= - \left(\frac{RT}{P} \right) f \\ \frac{\partial f}{\partial P} (RT+bP) + \frac{f}{P} (RT+bP) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial P} + \frac{f}{P} &= 0 \quad \frac{\partial f}{f} + \frac{\partial P}{P} = 0 \quad \checkmark \\ \ln f + \ln P &= \text{cte} = \ln A_0 \Rightarrow A_0 = \text{cte} \\ f(P) P &= A_0 \Rightarrow f(P) = \frac{A_0}{P} \\ V &= \frac{A_0}{P} (RT+bP) \\ PV &= A_0 (RT+bP) \end{aligned}$$

Gaz parfait: pas d'interaction entre les particules.
Pression faible

Si $P \rightarrow 0$

Si P tend vers 0, on aura:

$$PV = A_0 RT \quad \text{donc, la constante } A_0 \text{ n'est rien d'autre que le nombre de moles } n \text{ (} A_0 = n \text{)}$$

Dans notre cas, nous avons une mole de gaz, donc $n = A_0 = 1$. Ainsi :

$$PV = RT + bP \quad \text{ou bien:} \quad P(V - b) = RT \quad (1)$$

$$\text{On sait que l'équation d'état de Van Der Waals pour une mole (} n = 1 \text{) s'écrit : } (P + a/V^2) \cdot (V - b) = RT \quad (2)$$

La similitude entre les 2 équations (1) et (2) nous conduit à dire que le volume occupé par une seule mole du gaz est généralement très grand de telle sorte que le rapport a/V^2 devienne négligeable devant P .

Rappel du cours:

Pour une mole de gaz réel (c'est-à-dire $n = 1$), on déduit l'équation d'état des gaz réels :

$$(P + a/V^2) (V - b) = RT$$

Pour n moles, on peut montrer que cette équation devient :

$$(P + n^2 a/V^2) (V - nb) = nRT$$

C'est l'**équation d'état de Van Der Waals** dans sa forme extensive. C'est une équation d'état des fluides réels proposée par le physicien Johannes Diderik Van Der Waals en 1873. Elle lui valut le prix Nobel de physique en 1910. La contribution fondamentale de Van Der Waals fut de modifier la loi des gaz parfaits en introduisant phénoménologiquement la taille finie des molécules ainsi que l'interaction attractive entre celles-ci.

Exercice 6 :

1. Calculer les dérivées partielles suivantes pour un gaz parfait:

- $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$
- $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$
- $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$
- $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$
- $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$
- $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

2. En déduire que pour une fonction mathématique quelconque f telle que $f(x, y, z) = 0$, on a toujours:

- $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$
- $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 1$
- $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$
- $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

Exercice 6 : Solution détaillée

$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P}$

* $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{P} \right)_P = \frac{nR}{P} = \frac{V}{T}$

* $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P} = \frac{V}{T}$

* $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{PV}{nR} \right)_V = \frac{V}{nR} = \frac{T}{P}$

* $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{nRT}{V} \right)_T = -\frac{nRT}{V^2} = -\frac{P}{V}$

* $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{PV}{nR} \right)_P = \frac{P}{nR} = \frac{T}{V}$

* $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{nRT}{P} \right)_T = -\frac{nRT}{P^2} = -\frac{V}{P}$

* $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{V} \right)_V = \frac{nR}{V} = \frac{P}{T}$

Remarque :

- $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \times \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = 1$
- $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \times \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \times \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$
- $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \times \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = 1$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \times \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \times \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$$

Pour un gaz parfait:

$$\left(-\frac{V}{P}\right) \times \left(\frac{P}{T}\right) \times \left(\frac{T}{V}\right) = -1$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \times \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \times \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Exercice 7 :

On met en contact 2 morceaux de fer de masses $m_1 = 100 \text{ g}$ et $m_2 = 150 \text{ g}$, et de températures $T_1 = 25^\circ\text{C}$ et $T_2 = 90^\circ\text{C}$. Sachant que la capacité calorifique c du fer, supposée constante, est égale à $0,46 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, calculer la température finale à l'équilibre thermique.

Exercice 7 : Solution détaillée

Puisque la capacité calorifique est donnée en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, donc c'est une grandeur massique. Par conséquent il s'agit de la capacité calorifique massique et elle doit être notée avec un c minuscule (c)

Le système composé par les 2 morceaux de fer doit être supposé isolé de son milieu extérieur. Ainsi, il n'y aura pas d'échange d'énergie thermique avec l'extérieur ($Q = 0$)

A l'état d'équilibre thermique entre les 2 morceaux, on a:

Système isolé: $Q_T = 0$.

Etat initial: $T_1 = 25^\circ\text{C}$ $T_2 = 90^\circ\text{C}$

Etat final: Equilibre $Q_T = 0$.

$$Q_T = Q_2 + Q_1 = 0$$

$$m_2 c (T_e - T_2) + m_1 c (T_e - T_1) = 0$$

$$(m_1 + m_2) T_e = m_1 T_1 + m_2 T_2$$

$$T_e = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

AN:

$$T_e = \frac{(100\text{g})(25^\circ\text{C}) + (150\text{g})(90^\circ\text{C})}{150 + 100}$$

$$T_e = 64^\circ\text{C}$$

$$T_e = \frac{(100)(25 + 273,15) + (150)(90 + 273,15)}{100 + 150}$$

$$T_e = 337,15\text{K} = 64^\circ\text{C}$$

Rq: Attention: en générale, il faut utiliser (K) pour la température.

Ainsi: $\frac{0,1 \text{ kg} \times (25 + 273,15) + 0,15 \times (90 + 273,15)}{(0,1 + 0,15 \text{ kg})} = \frac{29,815 + 54,4725}{0,25} = 337,15 \text{ K} = 64^\circ\text{C}$

Exercice 8 :

On mélange dans une enceinte isolée, à pression constante, une masse m_1 d'eau à la température $T_1 = 67^\circ\text{C}$ avec une masse m_2 d'eau à la température $T_2 = 27^\circ\text{C}$

1. Quelle est la capacité calorifique spécifique de l'eau ?
2. Déterminez l'expression mathématique de la température d'équilibre T_e en fonction de m_1 , m_2 , T_1 et T_2 .
3. Calculer la valeur numérique de la température d'équilibre T_e pour $m_1 = 10 \text{ g}$ et $m_2 = 90 \text{ g}$
4. Quelle masse d'eau peut-on mélanger à la masse m_1 pour obtenir $T_e = 60^\circ\text{C}$?

Exercice 8 : Solution détaillée

1. La capacité calorifique spécifique de l'eau est d'environ $4,18 \text{ kJ/kg.K}$. Il faut donc fournir 418 kJ pour chauffer un litre d'eau de 0°C à 100°C .

$$c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} = 4,18 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1} = 1 \text{ cal.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Il faut toujours exprimer les masses en kg et les température en K.

2.

$$T_e = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

3.

$$T_e = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = \frac{(10 \text{ g})(67^\circ\text{C}) + (90 \text{ g})(27^\circ\text{C})}{10 + 90}$$

$$T_e = 31^\circ\text{C}$$

4.

$$\text{Etat initial: } m_1 = 10 \text{ g} \quad T_1 = 67^\circ\text{C} \\ m_2 = 90 \text{ g} \quad T_2 = 27^\circ\text{C}$$

$$\text{Etat final: } m_1 = 10, \quad m_2 = ? \quad T_e = 60^\circ\text{C}$$

$$m_2 (T_e - T_2) + m_1 (T_e - T_1) = 0$$

$$m_2 = m_1 \left(\frac{T_1 - T_e}{T_e - T_2} \right) = 10 \times \left(\frac{67 - 60}{60 - 27} \right)$$

$$m_2 = 2,12 \text{ g} \quad \Delta T(\text{K}) = \Delta T(^\circ\text{C})$$

Exercice 9 :

1. Quelle est l'équation d'état de n moles d'un gaz parfait dans son état décrit par les variables P, V, T? On donne R = 8,31 SI
2. En déduire l'unité de R
3. Calculez la valeur du volume molaire d'un gaz parfait à la pression de 1 bar et la température de 0°C

Exercice 9 : Solution détaillée

1. L'équation d'état d'un gaz parfait est $PV = nRT$. On en déduit que $R = \frac{PV}{nT}$ et que, par suite, R est en $\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (le produit PV est homogène à une énergie).
2. D'après la formule précédente, on a: $V = \frac{RT}{P} = \frac{8,31 \times 273}{101300} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1} = 22,4 \text{ L.mol}^{-1}$

Exercice 10 :

On note v le volume massique en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$ d'un gaz parfait de masse molaire M.

1. Montrez que l'équation d'état de ce gaz peut s'écrire $Pv = rT$. Précisez l'expression de r et son unité
2. Calculez la valeur de r pour la gaz oxygène (O_2)
3. En déduire le volume massique du gaz oxygène à 300 K et 1 bar.

Exercice 10 : Solution détaillée

1. l'équation d'état du gaz est $Pv = nRT$ où n désigne le nombre de moles de gaz contenu dans une masse unitaire $m = 1 \text{ kg}$ (une unité de masse).

Nous avons donc: $n = \frac{m}{M} = \frac{1}{M}$, d'où: $Pv = \frac{R}{M}T = rT$ avec: $r = \frac{R}{M}$ exprimé en $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$$2. \quad r = \frac{R}{M} = \frac{8,31}{32.10^{-3}} = 260 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$3. \text{ D'après la relation } Pv = rT, \text{ on tire: } v = 0,772 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$$

Remarque: En thermodynamique, il faut toujours faire attention à ne pas se faire piéger dans les applications numériques. Les pressions doivent être en Pa, les volumes en m^3 , et les masses en kg. Les données fournies dans les énoncés sont souvent exprimées dans des unités différentes.

Exercice 11 :

On considère un gaz qui obéit à la loi des gaz parfaits. A partir d'un état d'équilibre de ce gaz, la pression augmente de 1% et la température de 2%. Déterminez la variation relative du volume de ce gaz.

Exercice 11: Solution détaillée

L'équation du gaz est $PV = nRT$. En prenant la différentielle de cette expression, on obtient: $PdV + VdP = nRdT$

En divisant chaque membre par le produit PV , on obtient : $\frac{PdV + VdP}{PV} = \frac{nR}{PV}dT$

$$\text{Ce qui donne : } \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T}$$

$$\text{D'où: } \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} = 2\% - 1\% = 1\% \quad \text{La variation relative du volume est donc de 1\%}$$

Exercice 12 :

Pour un gaz parfait qui subit une transformation réversible et adiabatique, Laplace a montré que la pression P et le volume V du gaz sont liés par la relation $PV^\gamma = \text{Cte}$ (appelée loi de Laplace) où γ est le coefficient de Laplace, appelé aussi indice adiabatique ou bien coefficient adiabatique du gaz parfait. Il est sans unité et il est donné par :

$$\gamma = C_p/C_v = c_{p,m}/c_{v,m} \quad \text{avec: } c_{v,m} = R/(\gamma - 1) \quad \text{et} \quad c_{p,m} = R\gamma/(\gamma - 1)$$

1. Etablissez mathématiquement cette loi

2. L'équation des gaz parfaits $PV = nRT$ donne accès à d'autres variantes de la loi de Laplace qu'on vous demande de trouver.

Exercice 12 : Solution détaillée

Une transformation est dite adiabatique si elle s'effectue sans échange de chaleur avec le milieu extérieur.

Pour un gaz parfait, on a (voir exercice 13):

$$\text{Pour le couple de variables } (T, V), \text{ on a : } \delta Q_{\text{rev}} = C_v dT + P dV \quad (\text{Relation 1'})$$

$$\text{Pour le couple de variables } (T, P), \text{ on a : } \delta Q_{\text{rev}} = C_p dT - V dP \quad (\text{Relation 2'})$$

$$\text{Pour le couple de variables } (P, V), \text{ on a : } \delta Q_{\text{rev}} = \left(\frac{V}{\gamma-1}\right) dP + \left(\frac{\gamma P}{\gamma-1}\right) dV \quad (\text{Relation 3'})$$

Pour un G.P. :

$$\begin{cases} \delta Q = C_V dT + P dV \\ \delta Q = C_P dT + (-V dP) \\ \delta Q = \frac{V}{\gamma-1} dP + \frac{\gamma P}{\gamma-1} dV \end{cases}$$

On a : $C_V dT + P dV = 0 = \delta Q$: transformation adiabatique
 $\delta Q = 0$

$$\Rightarrow C_V dT + \frac{mRT}{V} dV = 0$$

$$\Rightarrow C_V \frac{dT}{T} + mR \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow C_V \frac{dT}{T} + (C_P - C_V) \frac{dV}{V} = 0 \quad \times \frac{1}{C_V}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} + \left(\frac{C_P}{C_V} - 1 \right) \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$

$$\int \frac{dT}{T} + \int (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = \int 0$$

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \ln cte$$

$$\ln(T V^{\gamma-1}) = \ln cte.$$

$$\textcircled{1} \quad \boxed{T V^{\gamma-1} = cte}$$

On a $mRT = PV$

$$T = \frac{PV}{mR}$$

$$\Rightarrow \frac{PV}{mR} V^{\gamma-1} = cte \Rightarrow P V^{\gamma} V^{\gamma-1} = cte.$$

$$\Rightarrow \boxed{P V^{\gamma} = cte} \textcircled{2} \quad \text{On a } V = \frac{mRT}{P}$$

$$\textcircled{3} \quad T \times \left(\frac{mRT}{P} \right)^{\gamma-1} = cte$$

$$T^{\gamma} \times \frac{T^{\gamma-1}}{P^{\gamma-1}} = cte, \quad T^{\gamma} \times T^{\gamma-1} \times P^{1-\gamma} = cte.$$

$$T^{\gamma} P^{1-\gamma} = cte \Rightarrow \boxed{T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cte}$$

Exercise 13 :

En thermodynamique, la calorimétrie est la mesure des quantités de chaleur échangées (absorbées ou cédées) par un système subissant une transformation, sans changement de composition ni changement de phase, en fonction des 3 variables d'état: la pression (P), la température (T) et le volume (V).

On considère un système thermodynamique subissant une **transformation réversible** élémentaire au cours de laquelle il échange une quantité de chaleur δQ_{rev} avec son milieu extérieur.

1. Rappelez les 3 relations qui expriment la quantité de chaleur échangée δQ_{rev} dans le cas général où chacune des 3 variables d'état P, T, et V peut varier indépendamment des deux autres.
2. Calculez les différents coefficients calorimétriques en fonction des capacités thermiques C_v et C_p du système thermodynamique et des dérivées partielles des variables d'état P, T, et V.
3. Donnez la relation de Mayer généralisée.
4. Dans le cas où le système thermodynamique considéré est constitué d'un gaz supposé parfait ayant un volume molaire normal égal à 22,414 litres/mol. Calculez la constante R dans le système des unités internationales.
5. Donnez les 3 relations qui expriment la quantité de chaleur échangée δQ_{rev} ainsi que la relation de Mayer dans le cas particulier d'une mole de gaz parfait.
6. Sachant que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, calculez C_p et C_v pour $\gamma = 1,4$

Exercice 13 : Solution détaillée

1. En physique, et plus particulièrement en thermodynamique, **les coefficients calorimétriques** d'un système thermodynamique donné sont des coefficients permettant d'exprimer la quantité de chaleur échangée (absorbée ou cédée) par le système lors d'une transformation thermodynamique s'effectuant **sans changement de composition chimique ni changement de phase**, en fonction des différentes variables d'état (pression, température et volume).

Si le système thermodynamique considéré subit une **transformation réversible** élémentaire au cours de laquelle les 2 variables d'état **T** (la température) et **V** (le volume) varient, la quantité de chaleur δQ_{rev} que ce système peut échanger avec son milieu extérieur est donnée par:

$$\delta Q_{\text{rev}} = C_v dT + L_v dV$$

où :

C_v est un coefficient calorimétrique appelé **la capacité thermique (ou calorifique) à volume constant**

L_v (noté également α_v ou ℓ) est aussi un coefficient calorimétrique appelé le **Coefficient de Dilatation Isotherme** ou bien la **Chaleur Latente (الكامن) de Dilatation**

Si le système thermodynamique considéré subit une **transformation réversible** élémentaire au cours de laquelle les 2 variables d'état **T** (la température) et **P** (la pression) varient, la quantité de chaleur δQ_{rev} que ce système peut échanger avec son milieu extérieur est donnée par :

$$\delta Q_{\text{rev}} = C_p dT + L_p dP$$

où :

C_p est aussi un coefficient calorimétrique appelé **la capacité thermique (ou calorifique) à pression constante**.

L_p (noté également α_p ou h) est aussi un coefficient calorimétrique appelé le **Coefficient de Compression Isotherme** ou bien la **Chaleur Latente de Compression**

Si le système thermodynamique considéré subit une **transformation réversible** élémentaire au cours de laquelle les 2 variables d'état **P** (la pression) et **V** (le volume) varient, la quantité de chaleur δQ_{rev} que ce système peut échanger avec son milieu extérieur est donnée par :

$$\delta Q_{\text{rev}} = \lambda dP + \mu dV$$

où λ et μ sont deux autres coefficients calorimétriques. Mais, cette troisième relation est généralement sans grand intérêt par comparaison aux autres deux autres.

En résumé:

Pour le couple de variables (T, V), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = C_v dT + L_v dV$ (Relation 1)

Pour le couple de variables (T, P), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = C_p dT + L_p dP$ (Relation 2)

Pour le couple de variables (P, V), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = \lambda dP + \mu dV$ (Relation 3)

Les 3 relations ci-dessus représentent la même quantité de chaleur, reçue ou cédée par le même système lors de la même transformation. Seul le choix des variables d'états indépendantes est différent.

Il faut toujours se rappeler que ces relations ne sont valables que pour une transformation réversible, condition sans laquelle les variables d'état intensives **T** et **P** ne seraient pas définies.

2. On sait que:

Pour le couple de variables (T, V), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = C_v dT + L_v dV = C_v dT + \ell dV$ (Relation 1)

Pour le couple de variables (T, P), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = C_p dT + L_p dP = C_p dT + h dP$ (Relation 2)

Pour le couple de variables (P, V), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = \lambda dP + \mu dV$ (Relation 3)

Les 3 relations ci-dessus représentent la même quantité de chaleur, reçue ou cédée par le même système thermodynamique lors de la même transformation. Seul le choix des variables d'états indépendantes est différent.

D'après les deux relations (1) et (2), on a : $C_v dT + \ell dV = C_p dT + h dP$

Cette égalité est vérifiée dans le cas général. Elle doit donc être vérifiée dans le cas particulier où la transformation est isobare ($P = \text{Cte}$). Ainsi:

Si la transformation est isobare, la pression $P = \text{Cte}$ et $dP = 0$. Nous aurons donc :

$$C_v dT + \ell dV = C_p dT \Rightarrow \ell dV = (C_p - C_v) dT \Rightarrow \ell = (C_p - C_v) \left(\frac{dT}{dV} \right)_P \quad (\text{Relation 4})$$

Par ailleurs, on sait que la température T est une variable d'état qui peut s'exprimer en fonction des deux autres variables d'état P et V de la manière suivante dans le cas général:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP$$

Dans le cas particulier où la transformation est isobare, on aura alors $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV$. Ce qui permet d'écrire :

$$\left(\frac{dT}{dV} \right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P$$

Ainsi, d'après la relation 4, le coefficient de dilatation isotherme ℓ s'écrit en fonction des capacités thermiques C_v et C_p , et de la dérivée partielle de T par rapport à V à pression constante: $\ell = (C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P$

Pour trouver les expressions demandées pour les autres coefficients calorimétriques, on procède à peu près de la même manière. En effet:

$\textcircled{a} \text{ Si } V = \text{cte} \quad dV = 0$
 $\Rightarrow C_p dT + h dP = C_v dT$
 $\Rightarrow h dP = (C_v - C_p) dT$

$$\Rightarrow R = (C_V - C_P) \left(\frac{dT}{dP} \right)_V = - (C_P - C_V) \left(\frac{dT}{dP} \right)_V$$

Si $V = \text{cte}$, $dV = 0$.

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP \Rightarrow \left(\frac{dT}{dP} \right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

$$\Rightarrow R = - (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

④ Si $V = \text{cte}$, $dV = 0$.

$$\lambda dP = C_V dT \Rightarrow \lambda = C_V \left(\frac{dT}{dP} \right)_V$$

$$\lambda = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

* Si maintenant $P = \text{Cte}$, donc $dP = 0$, et on aura : $\mu dV = C_P dT \Rightarrow \mu = C_P \left(\frac{dT}{dV} \right)_P = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P$

3. Dans cette question, on vous demande de **donner** la relation de Mayer généralisée. On ne vous demande pas de la démontrer ou de la retrouver.

La relation de Mayer généralisée est donnée par : $C_P - C_V = T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right]$

Pour celles et ceux qui veulent savoir comment on obtient cette relation, en voici la démonstration:

Montrer que : $C_P - C_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$.

Dans la question N°2, nous avons montré que:

$$\ell = (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P$$

Ce qui donne:

$$C_P - C_V = \ell \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Il nous faut donc montrer que:

$$\ell = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad ?$$

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - P dV$$

$$dU = C_V dT + (\ell - P) dV$$

Comme dU est une différentielle totale exacte, alors :

diff Totale exacte.

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial (\ell - P)}{\partial T} \right)_V$$

$$\textcircled{1} \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \text{ et } \delta Q_{\text{rev}} = C_V dT + \ell dV$$

$$\text{Donc: } dS = \left(\frac{C_V}{T} \right) dT + \left(\frac{\ell}{T} \right) dV$$

Comme dS est une différentielle totale exacte, alors :

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{C_V}{T} \right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\ell}{T} \right)_V$$

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_V - \frac{\ell}{T^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial C_V}{\partial V} \bigg|_T = \frac{\partial \ell}{\partial T} \bigg|_V - \frac{\ell}{T}$$

Puisque $\textcircled{1} = \textcircled{2} \Rightarrow \ell = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$

Pour plus de détails et d'approfondissement, je vous invite à visiter le lien internet suivant:
https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_de_Mayer

Il existe aussi plusieurs d'autres sites et vidéos YouTube qui expliquent comment trouver cette relation. (ex :
<https://videos.univ-grenoble-alpes.fr/video/7204-correction-thermochimie-relation-de-mayer-generalisee/>)

4. Pour un gaz supposé parfait, nous avons : $PV = nRT$, donc: $R = PV/nT = PV_n/T$ (où V_n est le volume molaire du gaz, c-à-d le volume d'une mole de gaz).

Les conditions normales (standards) de température et de pression (**CNTP** ou **CSTP**) fixent la température normale à 0°C (273,15 K) et la pression normale à 1 atm (1,013 bar = 101325 Pa), soit la pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer.

Dans les conditions normales, on prend généralement :

- Le volume molaire normal égal à 22,414 litres/mol (il faut convertir cette valeur en m³/mol)
- La pression égale à 1 atmosphère (il faut convertir cette valeur en Pascal)
- La température égale à 0°C (il faut convertir cette valeur en degré Kelvin)

Avec ces données, on peut facilement calculer la valeur de la constante universelle R dans le système des unités internationales. On trouve :

$$R = \frac{(22,414 \cdot 10^{-3}) (10^5)}{1 \times 273,15} = 8,314 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

5. La relation de Mayer dans le cas particulier d'une mole de gaz parfait est :

$$C_p - C_v = T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] = T \left[\frac{P}{T} \cdot \frac{V}{T} \right] = \frac{PV}{T} = nR$$

Les autres coefficients calorimétriques du gaz parfait s'expriment :

$$\ell = (C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = (nR) \cdot \left(\frac{T}{V} \right) = \frac{nRT}{V} = P$$

$$h = - (C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = - (nR) \cdot \left(\frac{T}{P} \right) = - \frac{nRT}{P} = -V$$

$$C_p - C_v = nR$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$C_v \left(\frac{C_p}{C_v} - 1 \right) = nR \Rightarrow C_v (\gamma - 1) = nR \Rightarrow C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

$$C_p = \gamma C_v = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

$$\lambda = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = \left(\frac{nR}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{T}{P} \right) = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{nRT}{P} \right) = \frac{V}{\gamma - 1}$$

$$\mu = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} nR \right) \left(\frac{T}{V} \right) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{nRT}{V} \right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P$$

En remplaçant les différents coefficients calorimétriques par leurs expressions respectives (que nous venons de déterminer) dans les relations (1), (2) et (3), on obtient:

Pour le couple de variables (T, V), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = C_v dT + P dV$ (Relation 1')

Pour le couple de variables (T, P), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = C_p dT - V dP$ (Relation 2')

Pour le couple de variables (P, V), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = \left(\frac{V}{\gamma-1}\right) dP + \left(\frac{\gamma P}{\gamma-1}\right) dV$ (Relation 3')

6. Sachant que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, calculez C_p et C_v pour $\gamma = 1,4$

AN: $\gamma = 1,4$
 $n = 1 \text{ mole}$, $R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$.

$$C_v = \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{(1 \text{ mole}) \times (8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1})}{1,4-1}$$

$$C_v = 20,78 \text{ J K}^{-1}$$

$$C_p = \gamma C_v = (1,4) (20,78)$$

$$C_p = 29,1 \text{ J K}^{-1}$$

Exercice 14 :

Dans cet exercice, nous allons étudier quelques **transformations réversibles** d'un système thermodynamique constitué **d'un gaz parfait**. Pour simplifier l'étude, on se limitera au cas où le système thermodynamique est fermé.

Déterminez les variations ΔU et ΔH ainsi que le travail W et la quantité de chaleur Q échangés entre le système et son milieu extérieur dans les 4 types de transformations thermodynamiques suivantes:

1. Transformation isotherme (représentez graphiquement le diagramme de Clapeyron)
2. Transformation isobare
3. Transformation isochore
4. Transformation adiabatique

Exercice 14 : Solution détaillée

1. Transformation isotherme :

Le système thermodynamique est constitué d'un gaz parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose que ce système thermodynamique est fermé.

Puisque le gaz est parfait, on a donc : $PV = Cte$ (d'après la loi de Boyle-Mariotte).

Rappel de la loi de Boyle-Mariotte : A température constante, la pression P d'une quantité donnée de gaz est inversement proportionnelle à son volume V . Autrement dit, à $T = Cte$, nous avons $PV = \text{Constante positive notée } a$

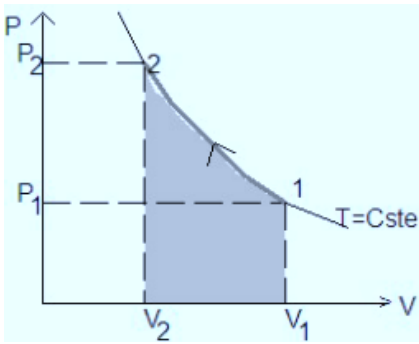
$PV = a \Rightarrow P = a/V = P(V)$. C'est équation n'est rien d'autre que l'expression mathématique de la fonction définie par $f(x) = a/x$ où $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et a est strictement positif ($f = P$ et $x = V$).

Traçons les fonctions: $f_1(x) = 1/x$; $f_2(x) = 4/x$; $f_3(x) = 9/x$ et $f_4(x) = 16/x$.

On peut facilement en déduire la forme générale de la représentation graphique de la fonction $f(x) = a/x$. On peut aussi facilement en déduire la forme générale de la représentation graphique de la fonction $P = P(V)$. Cette représentation porte généralement le nom de **diagramme de Clapeyron**

Question: Comment s'appelle la forme des représentations graphiques de ces fonctions

Remarque: L'hyperbole dont l'expression mathématique est la plus simple est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 1/x$.



Rappel:

Le diagramme de Clapeyron, ou diagramme P-V, est une représentation graphique de la pression P d'un système thermodynamique en fonction de son volume V pour suivre l'évolution d'une transformation. **Il n'est possible de tracer un tel diagramme que lorsque la pression est définie dans le système, c'est-à-dire dans une transformation réversible.**

Sur le **diagramme de Clapeyron** la transformation isotherme est représentée par un déplacement de l'état 1 à l'état 2. T étant constante ($T_1 = T_2 = T = \text{Constante}$ durant toute la transformation), donc:

La variation de l'énergie interne ΔU_{12} est nulle : $\Delta U_{12} = mc_{v,m} \Delta T_{12} = mc_{v,m} (T_2 - T_1) = 0$

La variation de l'enthalpie ΔH_{12} est également nulle : $\Delta H_{12} = mc_{p,m} \Delta T_{12} = mc_{p,m} (T_2 - T_1) = 0$.

La transformation étant réversible, la pression extérieure P_{ext} est donc constamment en équilibre avec la pression P du gaz pendant toute la transformation. Donc, le travail échangé au cours de cette transformation entre l'état 1 et l'état 2 s'écrit:

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} -P_{\text{ext}} \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} -P \cdot dV$$

La transformation étant isotherme, donc : $PV = nRT = P_1 V_1 = P_2 V_2 = \text{Cte}$

Ainsi, l'expression du travail W_{12} pour une transformation isotherme devient :

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} -P \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} -PV \cdot \frac{dV}{V} = \int_{V_1}^{V_2} -nRT \cdot \frac{dV}{V} = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \cdot \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Et puisque $P_1 V_1 = P_2 V_2$, on a alors : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$

Ainsi, l'expression de W_{12} peut également s'écrire en fonction des pressions P_1 et P_2 :

$$W_{12} = nRT \cdot \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} = P_1 V_1 \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} = P_2 V_2 \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

La chaleur échangée est donnée par l'application du premier principe de la thermodynamique:

$\Delta U_{12} = mc_{v,m} \Delta T_{12} = 0$ car la transformation est isotherme.

Donc : $\Delta U_{12} = W_{12} + Q_{12} = 0$

Ainsi:

$$Q_{12} = -W_{12} = nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} = P_1 V_1 \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} = P_2 V_2 \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Si la valeur de la température est connue ou donnée dans l'énoncé, on peut alors exprimer W_{12} et Q_{12} aussi de la manière suivante :

$$W_{12} = nRT \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} = nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_{12} = nRT \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} = nRT \cdot \ln \frac{V_1}{V_2}$$

où $T = T_1 = T_2 = T_{12} = \text{Cte}$ durant toute la transformation isotherme

Remarques :

- 1) Il faut toujours exprimer les grandeurs énergétiques demandées (W_{12} , Q_{12} , etc...) en fonction des variables d'état dont les valeurs sont déjà connues ou données dans l'énoncé.
- 2) Dans la plupart des exercices de thermodynamique, on donne rarement la valeur de la variable d'état maintenue constante pendant la transformation considérée. Autrement dit :
 - Lorsqu'on considère une transformation isotherme, la valeur de la température est rarement donnée.
 - Lorsqu'on considère une transformation isobare, la valeur de la pression est rarement donnée.
 - Lorsqu'on considère une transformation isochore, la valeur du volume est rarement donnée.

2. Transformation isobare :

La transformation étant isobare, la pression du gaz reste donc constante entre les deux états 1 et 2 ($P = P_1 = P_2 = P_{12} = \text{Cte}$ durant toute la transformation). Le travail W_{12} entre 1 et 2 vaut donc :

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} -P_{\text{ext}} \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} -P \cdot dV = -P_{12} \cdot \int_{V_1}^{V_2} dV = -P_{12} \cdot (V_2 - V_1) = -P_1 \cdot (V_2 - V_1) = -P_2 \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\text{car : } P_{12} = P_1 = P_2 = P = \text{Cte}$$

Si la valeur de la pression n'est pas connue (car la transformation est isobare), alors on peut utiliser la loi des gaz parfaits pour exprimer la pression: $P = nRT/V$

Et puisque $P_1 = P_2$, on aura alors:

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$$

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit : $\Delta U_{12} = W_{12} + Q_{12}$

$$\Delta U_{12} = mc_{v,m} \Delta T_{12} = C_v \Delta T_{12} = C_v (T_2 - T_1)$$

$$Q_{12} = C_v \Delta T_{12} - W_{12} = C_v (T_2 - T_1) + P_{12} \cdot (V_2 - V_1)$$

avec $P_{12} = P_1 = P_2$ peut être remplacée par nRT_1/V_1 ou nRT_2/V_2

$$\Delta H_{12} = mc_{p,m} \Delta T_{12} = C_p \Delta T_{12} = C_p (T_2 - T_1)$$

À toute température on a $\gamma = 5/3 \approx 1,67$ pour tout gaz parfait monoatomique (comme l'argon). Pour des températures proches de 20°C on a $\gamma = 7/5 = 1,4$ pour un gaz parfait diatomique (comme l'oxygène et l'azote).

Voir le calcul de C_v et de C_p dans la question N°6 de l'exercice précédent N° 13.

3. Transformation isochore :

La transformation étant isochore, le volume du gaz reste donc constant entre les deux états 1 et 2 ($V = V_1 = V_2 = V_{12} = \text{Cte}$ durant toute la transformation), le travail W_{12} entre 1 et 2 vaut donc:

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} -P_{\text{ext}} \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} -P \cdot dV = 0$$

Le premier principe s'écrit alors : $\Delta U_{12} = Q_{12}$ où $\Delta U_{12} = mc_{v,m} (T_2 - T_1) = C_v (T_2 - T_1)$

4. Transformation adiabatique :

La transformation étant adiabatique, la chaleur échangée durant la transformation est donc nulle : $Q_{12} = 0$

Le premier principe de la thermodynamique donne alors :

$$\Delta U_{12} = W_{12} + Q_{12} = W_{12} + 0 = W_{12} = mc_{v,m} (T_2 - T_1) = C_v (T_2 - T_1)$$

Exercice 15:

1. Quels sont les coefficients calorimétriques d'un corps ?
2. Trouvez les relations entre les coefficients calorimétriques et les coefficients thermoélastiques de ce corps.

Exercice 15 : Solution détaillée

1. Coefficients calorimétriques d'un système thermodynamiques :

En physique, et plus particulièrement en thermodynamique, les **coefficients calorimétriques** sont des coefficients permettant d'exprimer la chaleur absorbée par un système thermodynamique subissant une transformation, **sans changement de composition chimique ni changement de phase**, en fonction des différentes variables d'état (pression, température et volume).

Si le système thermodynamique considéré subit une transformation réversible élémentaire au cours de laquelle les 2 variables d'état **T** (la température) et **V** (le volume) varient, la quantité de chaleur δQ_{rev} que ce système peut échanger avec son milieu extérieur est donnée par: $\delta Q_{\text{rev}} = C_v dT + L_v dV$
où :

C_v est un coefficient calorimétrique appelé **la capacité thermique (ou calorifique) à volume constant**

L_v [noté également ℓ_v ou ℓ particulièrement et surtout quand il s'agit d'une seule mole ($n = 1$) ou bien une seule unité de masse ($m = 1 \text{ kg}$)] est aussi un coefficient calorimétrique appelé le **Coefficient de Dilatation Isotherme** ou bien la **Chaleur Latente (الكامن) de Dilatation**

Si le système thermodynamique considéré subit une transformation réversible élémentaire au cours de laquelle les 2 variables d'état **T** (la température) et **P** (la pression) varient, la quantité de chaleur δQ_{rev} que ce système peut échanger avec son milieu extérieur est donnée par : $\delta Q_{\text{rev}} = C_p dT + L_p dP$
où :

C_p est aussi un coefficient calorimétrique appelé **la capacité thermique (ou calorifique) à pression constante**.

L_p [noté également ℓ_p ou h particulièrement et surtout quand il s'agit d'une seule mole ($n = 1$) ou bien une seule unité de masse ($m = 1 \text{ kg}$)] est aussi un coefficient calorimétrique appelé le **Coefficient de Compression Isotherme** ou bien la **Chaleur Latente de Compression**

Si le système thermodynamique considéré subit une transformation réversible élémentaire au cours de laquelle les 2 variables d'état **P** (la pression) et **V** (le volume) varient, la quantité de chaleur δQ_{rev} que ce système peut échanger avec son milieu extérieur est donnée par : $\delta Q_{\text{rev}} = \lambda dP + \mu dV$

où: λ et μ sont deux autres coefficients calorimétriques. Mais, cette troisième relation est généralement sans beaucoup d'intérêt **sauf dans le cas des gaz parfaits comme nous allons le voir à la fin de cet exercice.**

En résumé:

Pour le couple de variables (T, V), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = C_v dT + L_v dV$ (Relation 1)

Pour le couple de variables (T, P), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = C_p dT + L_p dP$ (Relation 2)

Pour le couple de variables (P, V), on a : $\delta Q_{\text{rev}} = \lambda dP + \mu dV$ (Relation 3)

Les 3 relations ci-dessus représentent la même quantité de chaleur, reçue ou cédée par le même système lors de la même transformation. Seul le choix des variables d'états indépendantes est différent.

Il faut toujours se rappeler que ces relations ne sont valables que pour une transformation réversible, condition sans laquelle les variables d'état intensives T et P ne seraient pas définies.

2. Relations entre les coefficients calorimétriques et les coefficients thermoélastiques d'un corps:

Il convient de rappeler que les **coefficients thermoélastiques** permettent d'exprimer la variation de volume V ou de pression P subie par le système thermodynamique en fonction de la température ou de la pression:

a- **Le coefficient de dilatation isobare** (α_v ou α), exprimé en K^{-1} :

$$\alpha_v = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

b- Le coefficient de variation de pression isochore (α_p ou β), exprimé en K^{-1} :

$$\alpha_p = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

c- Le coefficient de compressibilité (الانضغاطية) isotherme (k_T ou χ), exprimé en Pa^{-1} :

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

On sait que:

Pour le couple de variables (T, V), on a : $\delta Q_{rev} = C_V dT + L_V dV = C_V dT + l dV$ (Relation 1)

Pour le couple de variables (T, P), on a : $\delta Q_{rev} = C_P dT + L_P dP = C_P dT + h dP$ (Relation 2)

Pour le couple de variables (P, V), on a : $\delta Q_{rev} = \lambda dP + \mu dV$ (Relation 3)

Les 3 relations ci-dessus représentent la même quantité de chaleur, reçue ou cédée par le même système lors de la même transformation. Seul le choix des variables d'états indépendantes est différent.

D'après les deux relations (1) et (2), on a:

$$\textcircled{1}: C_V dT + l dV = C_P dT + h dP.$$

$$\text{Si } P = \text{cte} \quad dP = 0.$$

$$C_V dT + l dV = C_P dT.$$

$$l dV = (C_P - C_V) dT.$$

$$l = (C_P - C_V) \left(\frac{dT}{dV} \right)_P.$$

$$P = \text{cte} \Rightarrow dP = 0.$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV.$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \Rightarrow l = (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P$$

$$\textcircled{2} \text{ Si } V = \text{cte} \quad dV = 0.$$

$$\Rightarrow C_P dT + h dP = C_V dT.$$

$$\Rightarrow h dP = (C_V - C_P) dT.$$

$$\Rightarrow R = (C_v - C_p) \frac{dT}{dP}_V = -(C_p - C_v) \frac{dT}{dP}_V$$

Si $V = \text{cte}$ $dV = 0$.

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP \Rightarrow \left(\frac{dT}{dP} \right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

$$\Rightarrow R = -(C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

④ Si $V = \text{cte}$ $dV = 0$.

$$\lambda dP = C_v dT \Rightarrow \lambda = C_v \left(\frac{dT}{dP} \right)_V$$

$$\lambda = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

$P = \text{cte}$ $dP = 0$

$$\mu dP = C_p dT \Rightarrow \mu = C_p \left(\frac{dT}{dP} \right)_V$$

$$\mu = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

⑤ Mayer généralisée.

$$C_p - C_v = T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right]$$

⑥: Gaz parfait. $PV = nRT$.

$$R = \frac{PV}{nT}$$

Conditions normales:

$n = 1 \text{ mole}$.

$$V = 22,414 \text{ L} = 22,414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$P = 1 \text{ atm} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T = 0^\circ \text{C} = 273,15 \text{ K}$$

$$R = \frac{(22,414 \cdot 10^{-3})(10^5)}{1 \times 273,15} = 8,314 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3$$

$$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

⑦:

$$C_p - C_v = T \times \left(\frac{P}{T} \times \frac{V}{T} \right) = \frac{PV}{T} = nR$$

En thermodynamique, la relation de Mayer généralisée est une formule reliant les capacités thermiques à pression constante C_p et à volume constant C_v d'un corps donné:

$$C_p - C_v = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

La démonstration de cette formule est détaillée dans le lien internet suivant:

https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_de_Mayer

Dans le cas d'un gaz parfait, cette relation prend la forme suivante: $C_p - C_v = nR$

$$* l = (C_p - C_v) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = (mR) \left(\frac{T}{V} \right) = \frac{mRT}{V} = P.$$

$$* b = - (C_p - C_v) \times \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -mR \times \frac{T}{P} = - \frac{mRT}{P} = -V.$$

$$* \lambda = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \Rightarrow \mu = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_P$$

$$\begin{cases} C_p - C_v = mR \\ \gamma = \frac{C_p}{C_v} \end{cases}$$

$$C_v \cdot \left(\frac{C_p}{C_v} - 1 \right) = mR \Rightarrow C_v \cdot (\gamma - 1) = mR$$

$$* C_v = \frac{mR}{\gamma - 1}$$

$$* C_p = \gamma C_v = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \times mR.$$

$$\textcircled{*} \lambda = C_v \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = \frac{mR}{\gamma - 1} \left(\frac{T}{P} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} \times \left(\frac{mRT}{P} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{V}{\gamma - 1}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \mu &= C_p \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_P = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \times mR \right) \times \left(\frac{T}{P} \right) \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \times \frac{mRT}{P} = P \times \frac{\gamma}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

En remplaçant les différents coefficients calorimétriques par leurs expressions respectives (que nous venons de déterminer) dans les relations (1), (2) et (3), on obtient:

$$\delta Q = C_v dT + P dV.$$

$$= C_p dT - V dP.$$

$$= \left(\frac{V}{\gamma - 1} \right) dP + \left(\frac{P\gamma}{\gamma - 1} \right) dV.$$

AN: $\gamma = 1,4$
 $n = 1 \text{ mole}$, $R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$.

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} = \frac{(1 \text{ mole}) \times (8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1})}{1,4 - 1}$$

$$C_V = 20,78 \text{ J K}^{-1}$$

$$C_P = \gamma C_V = (1,4) (20,78)$$

$$C_P = 29,1 \text{ J K}^{-1}$$

Montrer que: $C_P - C_V = T \left(\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right)$.

$$l = (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P$$

$$C_P - C_V = l \times \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad ?$$

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - P dV$$

$$dU = C_V dT + (l - P) dV$$

diff Totale exacte

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial (l - P)}{\partial T} \right)_V$$

$$\textcircled{1} \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$$dS = \left(\frac{C_V}{T} \right) dT + \left(\frac{l}{T} \right) dV$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{C_V}{T} \right) \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{l}{T} \right) \right)_V$$

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \frac{l}{T^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_V - \frac{l}{T}$$

Donc $\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$

Pour une transformation isotherme, on peut tirer des deux relations (1) et (2) :

$$\frac{L_p}{L_v} = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -V \kappa_T \quad (\text{Relation 4})$$

Pour une transformation isobare, on peut tirer à partir des deux relations (1) et (2) :

$$C_p - C_v = L_v \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = L_v V \alpha_v \quad (\text{Relation 5})$$

Pour une transformation isochore, on peut tirer à partir des mêmes relations (1) et (2) :

$$C_p - C_v = -L_p \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = -L_p P \alpha_p \quad (\text{Relation 6})$$

Pour comprendre comment établir les relations entre les coefficients calorimétriques et les coefficients thermoélastiques d'un corps, je vous invite de consulter le cours de thermodynamique disponible sur internet sur le lien suivant : http://www.fast.u-psud.fr/~doumenc/la200/CoursThermodynamique_L2.pdf. Dans la page 35 de ce cours, vous trouverez comment établir des relations entre les différents coefficients.