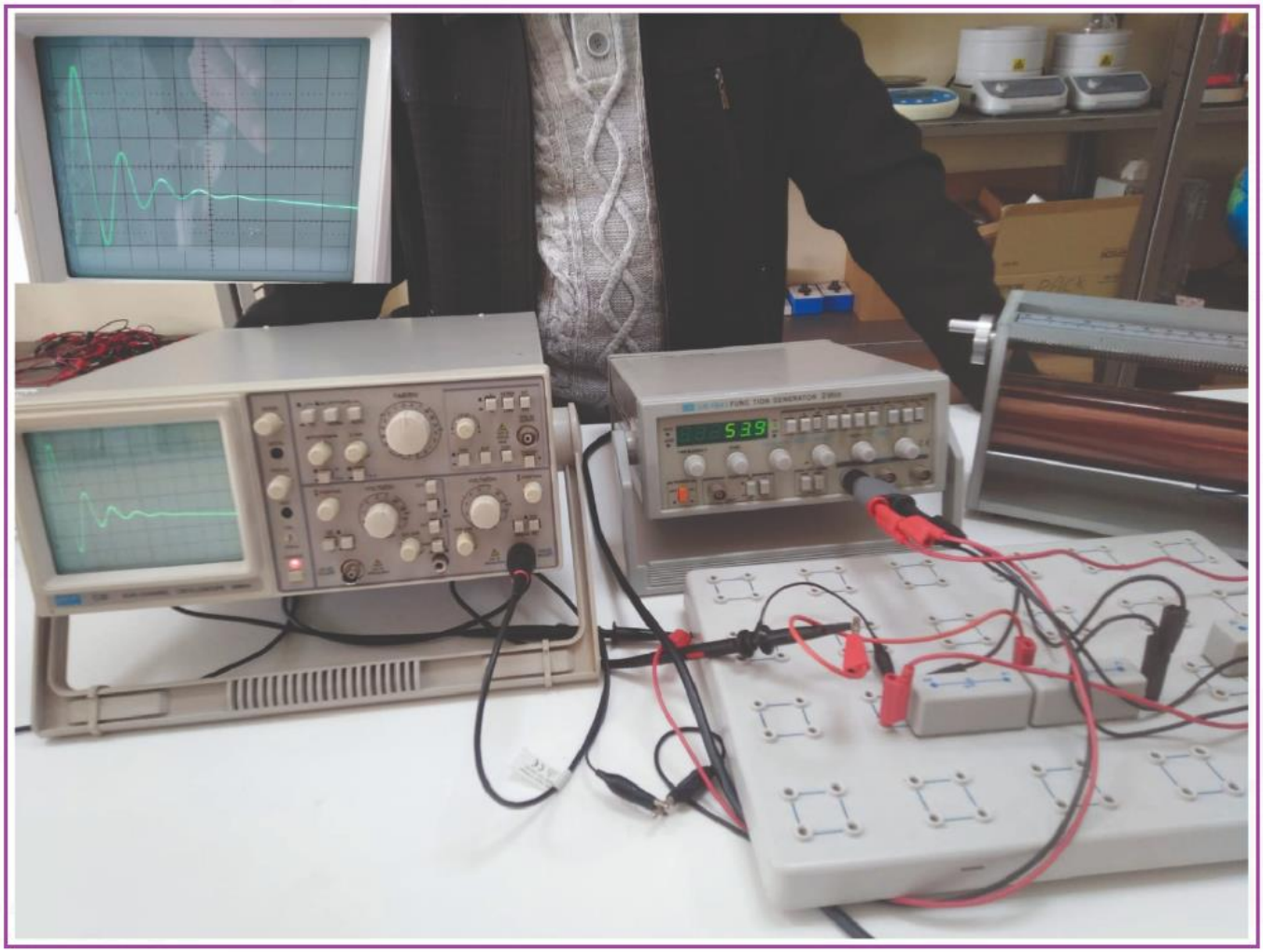
Cours de physique
Deuxième Bac
Science Physique

# Oscillations libres dans un circuit RLC

Www.AdrarPhysic.Fr



## Connaissances et savoir-faire exigibles

- Définir et reconnaitre les régimes périodique, pseudopériodique, critique et apériodique
- Savoir tracer l'allure de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps pour les régimes périodique, pseudopériodique, critique et apériodique
- Dans le cas d'un amortissement négligeable, effectuer la résolution analytique pour la tension aux bornes du condensateur ou la charge de celui-ci.
- En déduire l'expression de l'intensité du courant électrique dans le circuit
- Connaitre l'expression de la période propre, la signification de chacun des termes et leur unité.
- Savoir que le dispositif qui entretient les oscillations fournit l'énergie évacuée par transfert thermique.
- Savoir interpréter en termes d'énergie les régimes périodique, pseudopériodique, apériodique et entretenu.
- Savoir exploiter un document expérimental pour :
  - Identifier les tensions observées
  - Reconnaitre un régime
  - Montrer l'influence de R et de L ou C sur le phénomène d'oscillations

Www.AdrarPhysic.Fr

*De nos jours, le circuit RLC est l'un des systèmes 'électriques les plus répandus dans la vie quotidienne. On le retrouve en effet dans les radios de nos voitures, dans la plupart de nos appareils 'électroménagers et même dans les dispositifs antivols des magasins*

*Une bobine et un condensateur deux réservoirs d'énergies électriques.*

*Un circuit comportant un conducteur ohmique de résistance $r'$, une bobine d'inductance $L$ et de résistance $r$, et un condensateur de capacité $C$ associés en série, est appelé : circuit $(RLC)$ en série.*

*Avec $R = r + r'$ est la résistance totale du circuit.*

## 1- Décharge d'un condensateur dans une bobine

### 1-1- Etude expérimentale

#### 1-1-1- Activité

On réalise le montage de la figure 1 en adoptant une faible valeur de $r'$. On charge le condensateur en plaçant le commutateur en position 1. On bascule le commutateur en position 2. En utilisant un système d'acquisition informatisée, on visualise la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur. On obtient la courbe figure :2

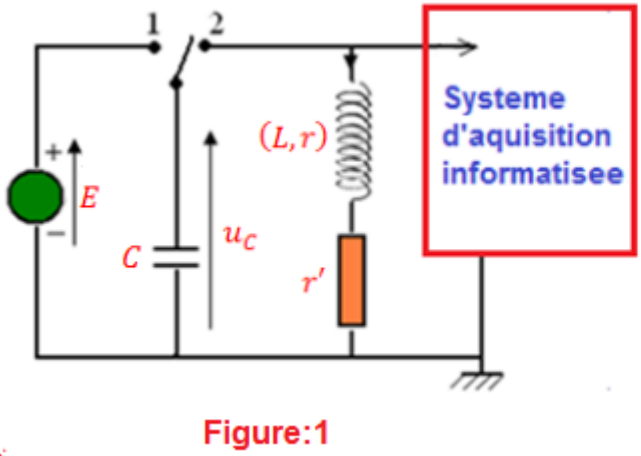


Figure:1

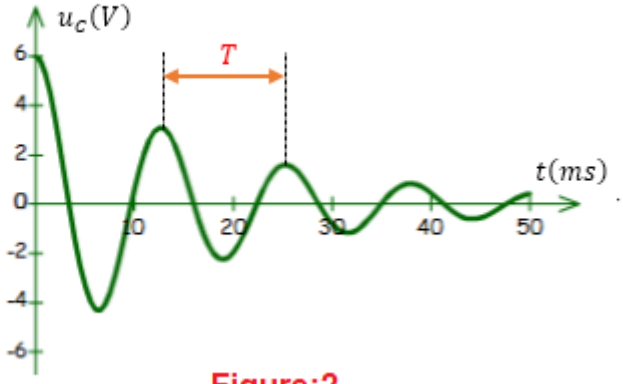


Figure:2

#### 1-1-2- Observation

Lorsqu'on place K en position 1, le condensateur se charge et lorsqu'on bascule en 2 on obtient un circuit $RLC$ série où le condensateur se décharge dans la bobine et le conducteur ohmique, la tension $u_C(t)$ est une tension alternative, mais n'est pas périodique. L'amplitude de cette tension décroît avec le temps : on obtient des oscillations amorties. Et puisque ces oscillations sont obtenues sans qu'on lui fournît une énergie de l'extérieur on dit aussi qu'elles sont libres, donc ce sont des oscillations libres amorties.

C'est un phénomène : pseudo- périodique de pseudo- période T

### 1-1-3- Conclusion :

La décharge d'un condensateur, initialement chargé, dans une bobine d'un circuit $RLC$ série, fait apparaître des oscillations libres amorties.

On dit que le circuit $RLC$ série est un oscillateur électrique libre amortie.

### 1-1-4- Influence de : $R$

Quelle est l'influence de la résistance $R$ sur :

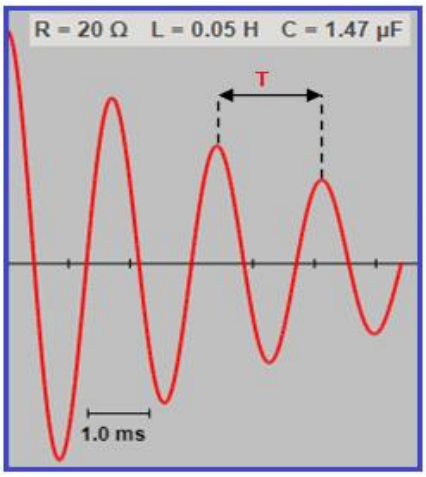
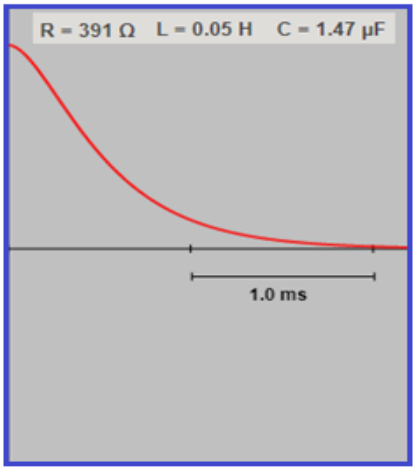
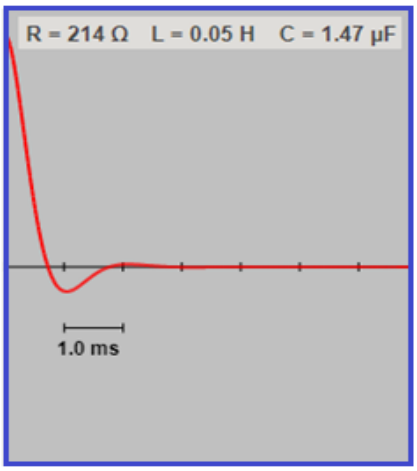
* L'amplitude des oscillations ?

  Lorsqu'on fait varier la résistance totale du circuit l'amplitude des oscillations varie aussi

* la pseudo- périodique T ?

  Pour des faibles valeurs de la résistance, on constate que la pseudo-période ne dépend pas de la valeur de $R$ .

On règle la résistance du conducteur ohmique sur des valeurs : on obtient trois cas :

| Régime pseudopériodique | Régime apériodique | Régime critique |
|---|---|---|
|  |  |  |
| La résistance $R$ Est faible | La résistance $R$ Est très grande | La résistance $R$ Est grande |
| Pour des faibles valeurs de $R$, l'amplitude des oscillations décroit progressivement et durent longtemps jusqu'à ce qu'elle s'annule (amortissement est faible) La pseudo-période est indépendante de $R$ C'est le régime pseudopériodique qui est caractérisé par la pseudo-période $T$ ,avec $T \approx T_0$ | Si la résistance $R$ du circuit est tres grande, les oscillations disparaissent (l'amortissement est fort et la tension tend vers zero lentement c'est le régime apériodique, | Il existe un régime frontière entre les deux régimes pseudopériodique et apériodique appelée régime critique. La valeur correspondante de la résistance critique $R_C$ telque : $R = R_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$ Pour $R = R_C$ la tension tend rapidement vers zero sans oscillations |

## 1-1-5- Influence de : L et C

### a- Influence de l'inductance L

- **Activité**

On règle $R$ sur la valeur $50$

- dans le premier cas on fixe $L$ sur la valeur $0{,}05H$ et $C$ sur la valeur $2\mu F$, on mesure la pseudo-période $T$ on trouve $2ms$
- dans un deuxième cas on fixe $L$ sur la valeur $0{,}16H$ et $C$ sur la valeur $2\mu F$, on mesure la pseudo-période $T$ on trouve $3{,}5ms$
  on obtient la figure :4

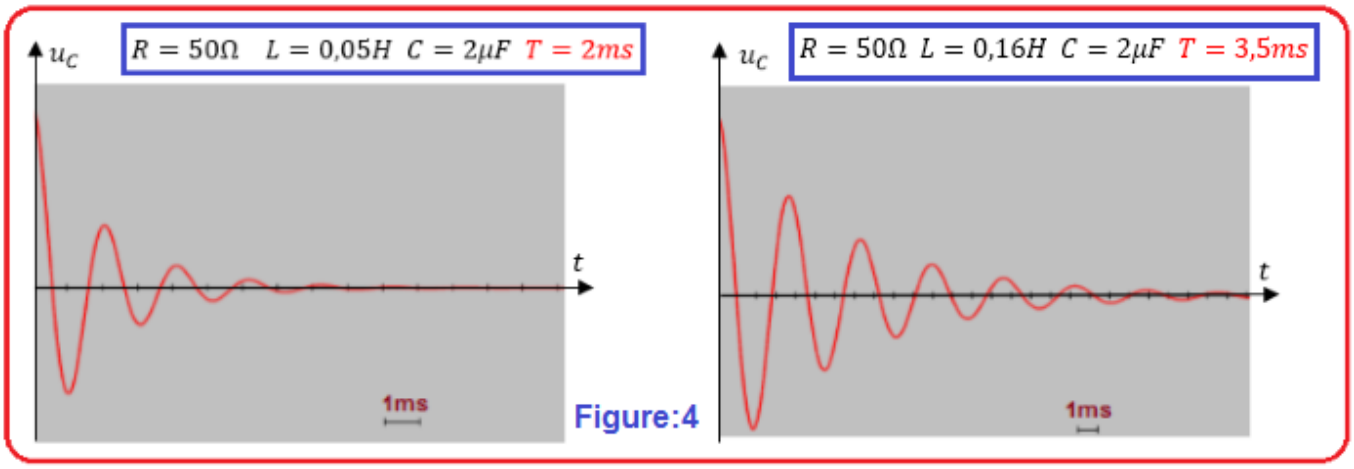


Figure:4

- **Conclusion**

D'après les résultats on conclut que : lorsque on augmente l'inductance $L$ de la bobine la pseudo-période augmente

### b- Influence de la capacité C

- **Activité**

On règle $R$ sur la valeur $50$

- dans le premier cas on fixe $L$ sur la valeur $0{,}05H$ et $C$ sur la valeur $1\mu F$, on mesure la pseudo-période $T$ on trouve $1{,}4ms$
- dans un deuxième cas on fixe $L$ sur la valeur $0{,}05H$ et $C$ sur la valeur $2\mu F$, on mesure la pseudo-période $T$ on trouve $2ms$
  on obtient la figure :5

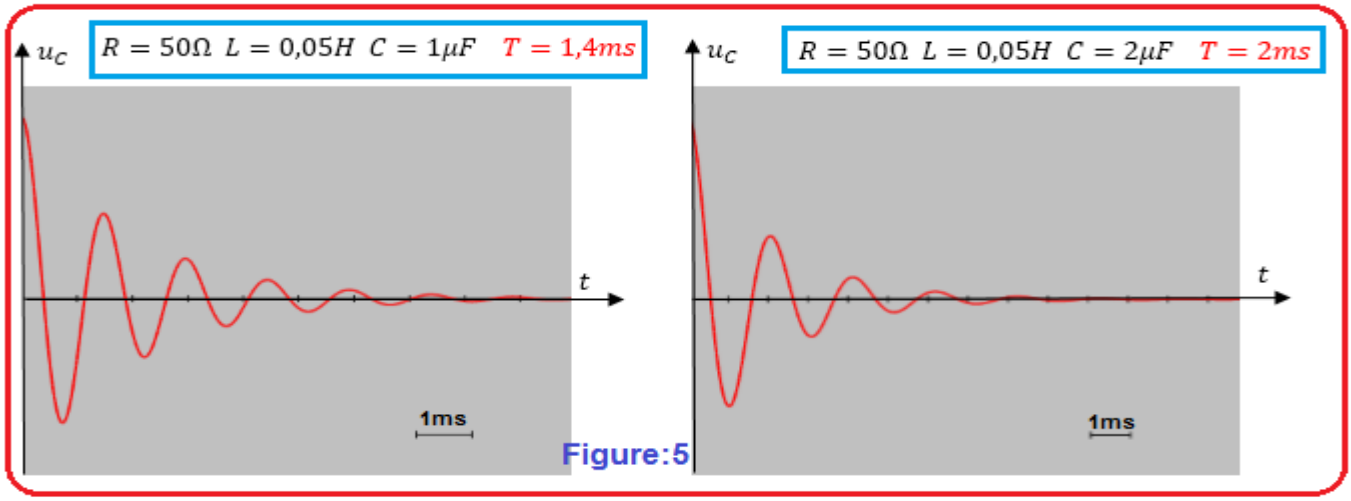


Figure:5

- **Conclusion**

D'après les résultats on conclut que : lorsque on augmente la capacité $C$ du condensateur la pseudo-période augmente

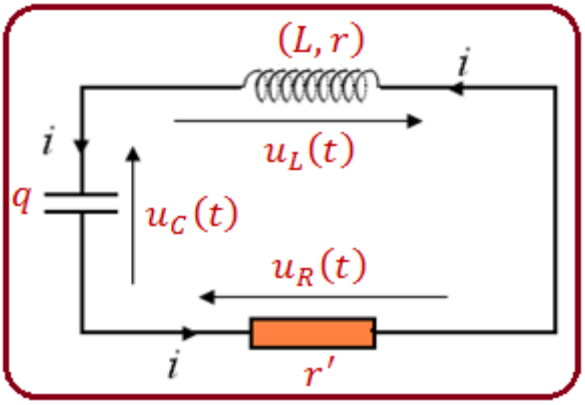
c- **conclusion**

On conclue que :la pseudo-période dépend de L et de C.

## 1-2- L'équation différentielle

### 1-2-1- Cas du circuit :RLC

On considère le circuit $RLC$ à coté, constitué par une bobine d'inductance $L$ de résistance négligeable d'un conducteur ohmique de résistance $r'$ et d'un condensateur de capacité $C$ .




On applique la loi d'additivité des tension,

on aura :

$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_R(t)=r'i(t) \\ u_L(t)=ri(t)+L\dfrac{di(t)}{dt} \\ i(t)=\dfrac{dq}{dt}=\dfrac{d(Cu_C(t))}{dt}=C\dfrac{du_C(t)}{dt} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation (1)

$$r'i(t)+ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+u_C(t)=0$$

$$(r'+r)i(t)+L\frac{di(t)}{dt}+u_C(t)=0$$

on pose $R=r'+r$ :

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+u_C(t)=0 \Rightarrow RC\frac{du_C(t)}{dt}+LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+u_C(t)=0$$

$$RC\dot{u}_C(t)+LC\ddot{u}_C(t)+u_C(t)=LC\ddot{u}_C(t)+RC\dot{u}_C(t)+u_C(t)=0$$

D'où l'équation différentielle

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C(t)=0$$

La grandeur $\left(\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}\right)$ exprime le phénomène d'amortissement des oscillations et elle se détermine suivant la valeur de R ( le régime des oscillations )

Dans le cas du régime pseudopériodique , la solution de l'équation différentielle s'écrit :$u_C(t)=U_0e^{-\frac{R}{2L}.t}cos\left(\frac{2\pi}{T}.t+\varphi\right)$

et toutes les autres constantes on les détermine à partir du graphe .

Www.AdrarPhysic.Fr

## 1-2-2- Cas du circuit idéal

### a- Définition

Lorsque la résistance du circuit $RLC$ est nulle, on dit qu'il est **idéal** et on l'appelle circuit $LC$ car on ne peut pas le réalisé .

### b- équation différentielle

$R=0$ : L'équation différentielle devient $\dfrac{d^2u_C(t)}{dt^2}+\dfrac{1}{LC}u_C(t)$

### c- solution de l'équation différentielle

La solution est de la forme :

$$u_C(t)=U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$$

$U_m$ : *la valeur de la tension maximale*

$T_0$ : *La période propre*

$\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi$: *La phase à l'instant t*

$\varphi$ : *La phase à l'instant* $t=0$

$\omega=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi N_0$ : *la pulsation*

### d- Détermination des constantes

- La valeur de $U_m$ : on considère l'état initial ou le condensateur est charge : $u_C(t=0)=U_m=E \Rightarrow U_m=E$
- La valeur de $\varphi$ :

à l'instant $t=0$ on a $\begin{cases}u_C=E\\ i(t)=0\end{cases}$

$$\Rightarrow u_C(t)=E=E\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.0+\varphi\right)=E\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{E}{E}=1$$

D'où : $\varphi=0$

- La valeur de $T_0$ :

On a : $\begin{cases}u_C(t)=U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\\ \dot{u_C}(t)=-U_m.\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\\ \ddot{u_C}(t)=-U_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\end{cases}$

On remplace dans l'équation différentielle : $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_C(t)=\ddot{u_C}(t)+\frac{1}{LC}u_C(t)=0$

C'est-à-dire :

$$-U_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)+\frac{1}{LC}.U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)=0 \Rightarrow U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\left[\frac{1}{LC}-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right]=0$$

Puisque : $U_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\neq 0$ on a : $\frac{1}{LC}-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2=0 \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2=\frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

D'où : $T_0=2\pi\sqrt{LC}$

e- Expression de : $u_C(t), q(t)$ et $i(t)$

- $u_C(t)$

On a $u_C(t)=U_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

- $q(t)$

On a : $q(t)=Cu_C(t)=C.U_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right) \Rightarrow q(t)=C.U_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$ On pose : $Q_m=C.U_m$

D'où : $q(t)=Q_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

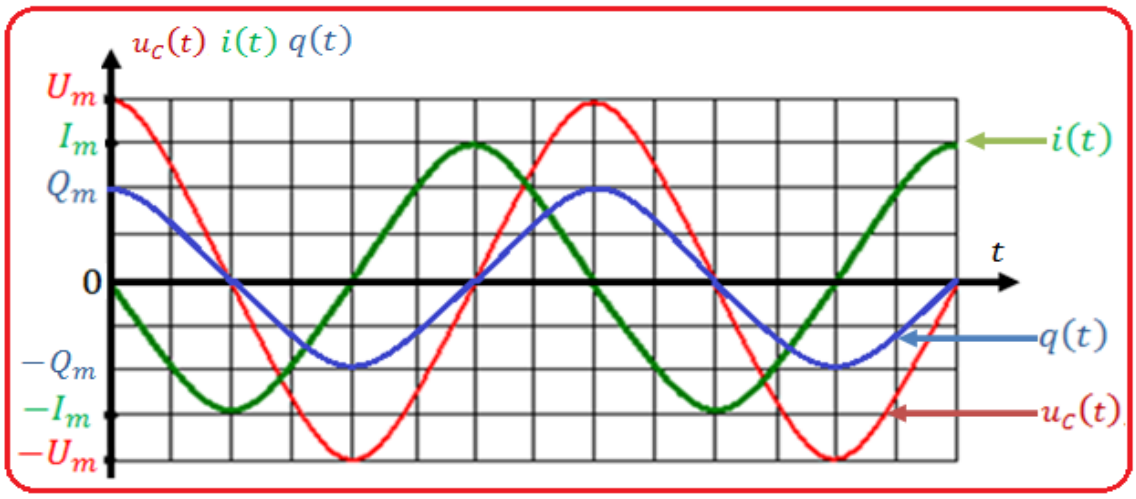
- $i(t)$

On a : $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[C.U_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)\right]=-C.U_m.\frac{2\pi}{T_0}sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$ Avec $\frac{2\pi}{T_0}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Donc : $i(t)=-C.U_m.\frac{1}{\sqrt{LC}}sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)=-\frac{C.U_m}{\sqrt{LC}}sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$ on pose : $I_m=\frac{C.U_m}{\sqrt{LC}}$

D'où : $i(t)=-I_m sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

f- Représentation graphique de : $u_C(t), q(t)$ et $i(t)$



## 1-3- Echange d'énergie entre le condensateur et la bobine

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que :

- Le condensateur peut stocker de l'énergie électrique,

$$\xi_e = \frac{1}{2}Cu_C{}^2$$

- La bobine peut stocker de l'énergie magnétique

$$\xi_m = \frac{1}{2}Li^2$$

- Soit $\xi_t$ l'énergie totale du circuit tel que :

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}Cu_C{}^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

### 1-3-1- Le circuit idéal : LC

#### a- Conservation de l'énergie total

$$\xi_t = \frac{1}{2}CU_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) = \frac{1}{2}CU_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{1}{2}L\left(\frac{CU_m}{\sqrt{LC}}\right)^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$\xi_t = \frac{1}{2}CU_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{1}{2}L\frac{C^2U_m^2}{LC}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) = \frac{1}{2}CU_m^2\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right) = \frac{1}{2}CU_m^2$$

D'où : $\xi_t = \frac{1}{2}CU_m{}^2$

Puisque : $C$ est une constante et $U_m$ est une constante donc l'énergie total $\xi_t$ est constante on dit qu'il ya conservation de l'énergie total dans le circuit $LC$

#### b- Détermination de l'équation différentielle

Puisque $\xi_t$ est constante on a :

$$\xi_t = \xi_C + \xi_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2$$

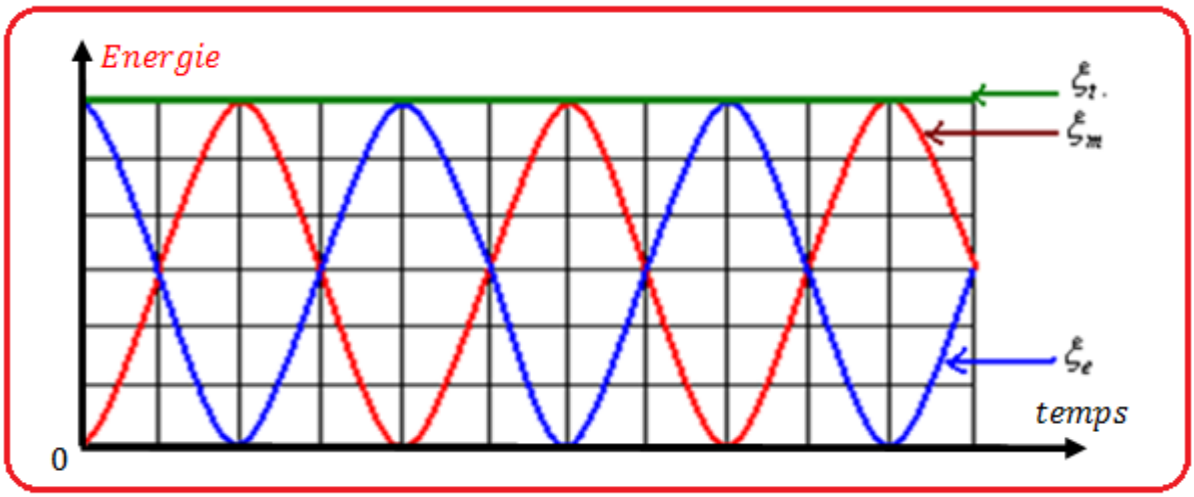
$$\frac{d\xi_t}{dt} = 0 = \frac{1}{2}C\frac{d(u_C^2)}{dt} + \frac{1}{2}LC^2\frac{d}{dt}\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}C\cdot 2\cdot u_C\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2}LC^2\cdot 2\cdot\frac{du_C}{dt}\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$0 = Cu_C\cdot\dot{u}_C + LC^2\dot{u}_C\ddot{u}_C = C\dot{u}_C(u_C + LC\ddot{u}_C)$$

$$C\dot{u}_C(LC\ddot{u}_C + u_C) = 0 \Rightarrow \begin{cases} C\dot{u}_C \neq 0 \\ (LC\ddot{u}_C + u_C) = 0 \end{cases} \Rightarrow LC\ddot{u}_C + u_C = 0$$

D'où l'équation différentielle $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C(t)$

c- Représentation graphique de : $\xi_e, \xi_m$ et $\xi_t$




## 1-3-2- Cas du circuit $RLC$

Dans le circuit $RLC$ l'équation différentielle est de la forme :

$$\ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L}\dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$$

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d\xi_t}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{d(u_C^2)}{dt} + \frac{1}{2}LC^2\frac{d}{dt}\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}C\cdot 2\cdot u_C\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2}LC^2\cdot 2\cdot\frac{du_C}{dt}\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$= Cu_C\cdot\dot{u}_C + LC^2\dot{u}_C\ddot{u}_C = C\dot{u}_C(u_C + LC\ddot{u}_C)$$

On trouve que : $\frac{d\xi_t}{dt} = C\dot{u}_C(u_C + LC\ddot{u}_C)$

On utilise l'équation différentielle on trouve que : $\ddot{u}_C(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = -\frac{R}{L}\dot{u}_C$

c'est-à-dire : $\frac{d\xi_t}{dt}$ on remplace dans $LC\ddot{u}_C + u_C = -RC\dot{u}_C$

$$\frac{d\xi_t}{dt} = C\dot{u}_C(u_C + LC\ddot{u}_C) = C\dot{u}_C(-RC\dot{u}_C) = -RC^2(\dot{u}_C)^2$$

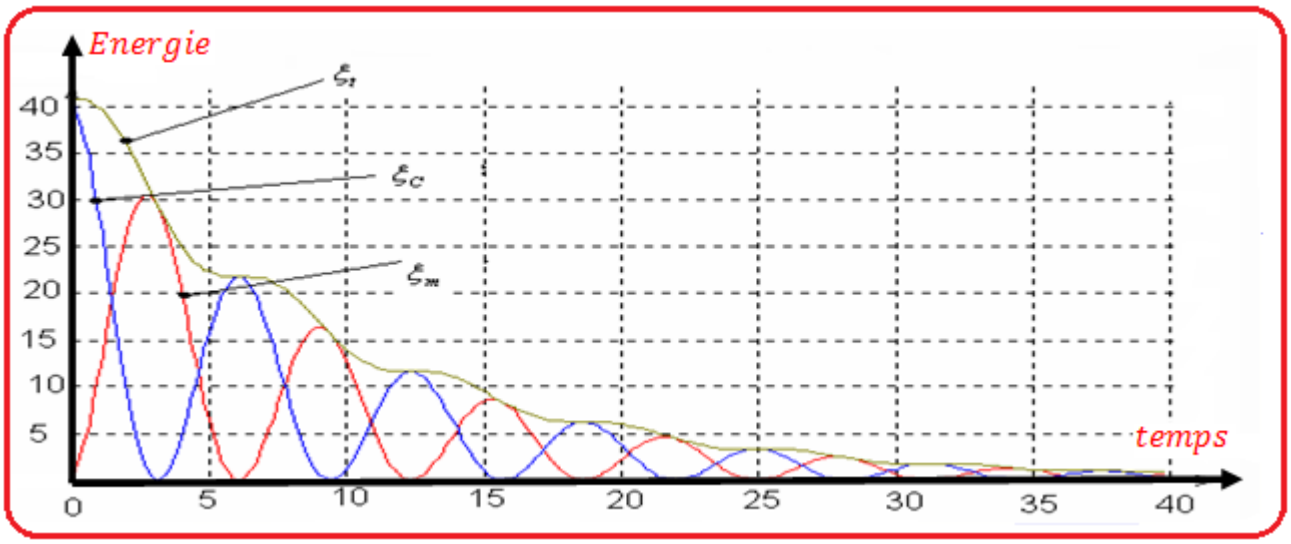
On a : $\begin{cases} i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C(t))}{dt} = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\dot{u}_C \Rightarrow \dot{u}_C = \frac{i}{C} \end{cases}$

donc $\frac{d\xi_t}{dt} = -RC^2(\dot{u}_C)^2 = -RC^2\left(\frac{i}{C}\right)^2 = -R\cdot i^2$

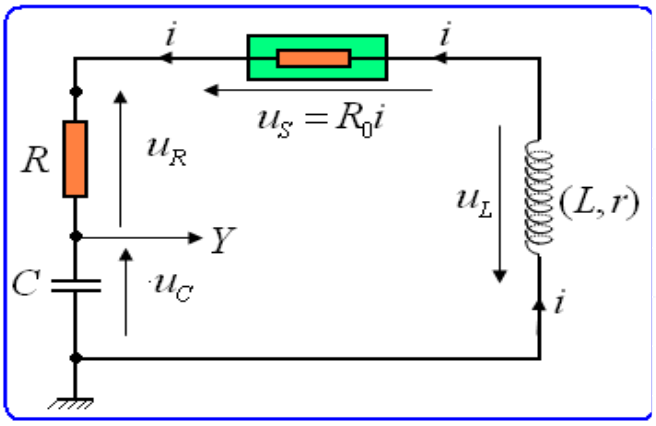
D'où : $\frac{d\xi_t}{dt} = -R.i^2$

Ce qui montre que l'énergie globale du circuit $(RLC)$diminue à cause de l'existence de la résistance $R$.

Conclusion : Dans un circuit (R,L,C) série, l'amortissement des oscillations est dû à une perte d'énergie par effet Joule .




## 1-4- Entretien des oscillations




Les oscillations d'un circuit comportant une bobine et un condensateur sont toujours amorties , car le circuit possède toujours une résistance ( bobine, fils de connexion ) .

Il en résulte des pertes d'énergie par effet Joule qui doive d'être compensées si on veut entretenir les oscillations.

On réalise le montage qui comporte en plus du circuit $RLC$ ,

Un module électronique (dispositif d'entretien des oscillations) contenant l'amplificateur opérationnel (AO) qui fournit de l'énergie nécessaire au dipôle RLC pour récupérer celle qui est dissipée par effet joule dans le conducteur ohmique, il délivre une tension $u_S = R_0.i$ possédant une alimentation propre tel que $u_S = R_0 i$ :

À chaque instant, on peut appliquer la loi d'additivité des tensions :

$$u_S = u_R + u_L + u_C \qquad \begin{cases} u_S = R_0 i \\ u_R = Ri \\ u_L = ri + L\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

$$R_0 i = (R+r)i + L\frac{di}{dt} + u_C \quad \text{On pose} \quad : R_t = R + r \quad i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt} \ , \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$R_0 C\frac{du_C}{dt} = (R+r)C\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C \quad = R_t C\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C$$

$$-R_0 C\frac{du_C}{dt} + R_t C\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = (R_t - R_0)C\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

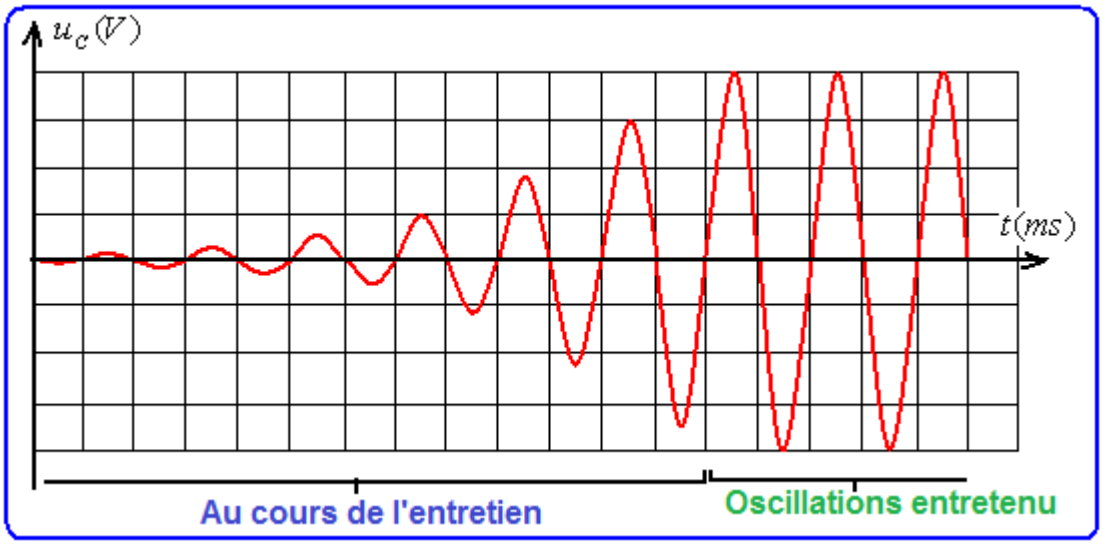
$$(R_t - R_0)C\dot{u}_C + LC\ddot{u}_C + u_C = 0$$

Lorsqu'on entretient les oscillations l'équation différentielle devient idéal c'est-à-dire : $LC\ddot{u}_C + u_C = 0$

Et : $(R_t - R_0)C\dot{u}_C = 0$ et puisque $C\dot{u}_C \neq 0$ : on aura $R_t - R_0 = 0 \Rightarrow R_t = R_0$

Conclusion :

Pour entretenir les oscillations il faut que la résistance total $R_t$ du circuit $RLC$ est égale à la résistance du générateur d'entretien $R_0$ ,âpres l'opération d'entretien la tension $u_C$ visualisée sur l'écran de l'oscilloscope devient :




Www.AdrarPhysic.Fr