

Exercice 1

Www.AdrarPhysic.Fr

Étude du mouvement du centre d'inertie d'un système mécanique

Le saut en longueur à moto est une épreuve sportive de performance où il y a un véritable défi de sauter le plus loin à partir d'un espace défini.

Cet exercice se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie G d'un système (S) formé d'un motard et d'une moto se déplaçant sur une piste de compétition.

Cette piste est formée :

-d'une partie rectiligne A'B' inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à l'horizontale ;

-d'une zone d'atterrissage (  $\pi$  ) plane et horizontale. (figure 1 ).

Dans tout l'exercice, les frottements sont négligés et l'étude du mouvement du centre d'inertie G est réalisée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

**Données :**

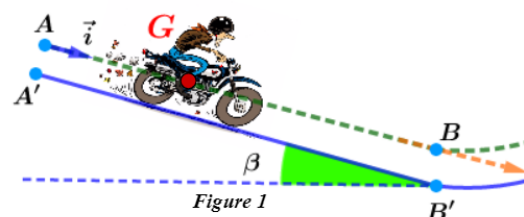
-L'angle  $\beta = 10^\circ$

-Intensité de la pesanteur :  $g = 10\text{ms}^{-2}$

- Masse du système (S) :  $m = 190\text{kg}$

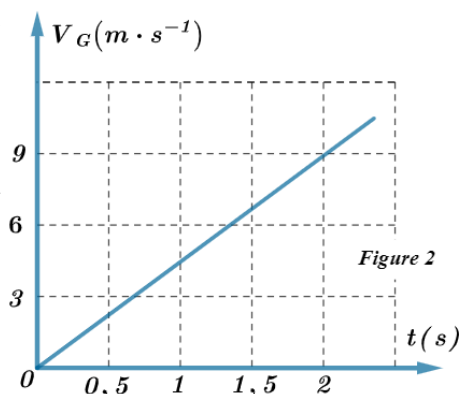
A un instant choisi comme origine des dates ( $t = 0$ ), le système (S) s'élance sans vitesse initiale, d'une position où le centre d'inertie G est confondu avec le point A.

Le système est soumis, au cours de son mouvement sur la partie A'B', à la réaction du plan incliné, à son poids et à une force motrice  $\vec{F}$  constante, dont la ligne d'action est parallèle à la trajectoire de G et le sens est celui du mouvement. Pour étudier le mouvement de G au cours de cette phase, on choisit un repère d'espace (A,  $\vec{i}$ ) parallèle à A'B' (figure 1) et on repère la position de G par son abscisse x.



- 1 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'expression de l'accélération  $a_G$  du mouvement de G est :  $a_G = \frac{F}{m} + g \cdot \sin \beta$

- 2 La courbe de la figure 2 représente les variations de la vitesse instantanée  $V_G$  du centre d'inertie G en fonction du temps. En exploitant cette courbe, trouver la valeur de l'accélération  $a_G$



- 3 Dédurre l'intensité F de la force motrice.
- 4 Écrire l'expression numérique de l'équation horaire  $x = f(t)$  du mouvement de G.
- 5 Sachant que  $AB = 36\text{m}$ , déterminer l'instant  $t_B$  de passage de G par le point B.
- 6 Calculer la vitesse  $V_B$  de passage de G par le point B.

Solution

- 1 •Le système (S) est soumis au forces suivantes :

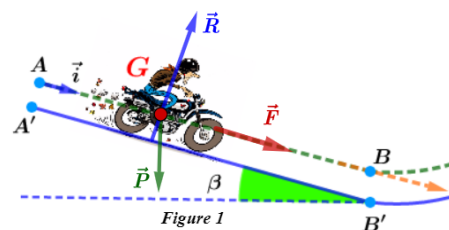
► Le poids  $\vec{P}$  ► La réaction du plan incliné  $\vec{R}$

► La force motrice  $\vec{F}$

• D'après la deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

La projection sur l'axe (Ax) :  $P_x + R_x + F_x = m \cdot a_x$

$$\Leftrightarrow m \cdot g \cdot \sin \beta + 0 + F = m \cdot a_G$$



$$\Leftrightarrow a_G = \frac{F + m \cdot g \sin \beta}{m} \Leftrightarrow a_G = \frac{F}{m} + g \cdot \sin \beta$$

2 La courbe  $V_G = f(t)$  est une fonction linéaire :  $\Leftrightarrow V_G = k \cdot t$

$$\text{Avec : } k = \frac{\Delta V_G}{\Delta t} = \frac{9-0}{2-0} = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \Rightarrow V_G = 4,5 \cdot t$$

$$\text{Et d'autre part on a : } a_G = \frac{dV_G}{dt} = \frac{d(4,5 \cdot t)}{dt} \Leftrightarrow a_G = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3 D'après le résultat de la question 1 :  $m \cdot g \cdot \sin \beta + F = m \cdot a_G$

$$\Rightarrow F = m \cdot [a_G - g \sin \beta] \Rightarrow F = 190 \cdot [4,5 - 10 \times \sin 10] \Rightarrow F = 525,07 \text{ N}$$

4 Puisque la trajectoire est rectiligne et  $a_G = \text{Cte} \neq 0$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \quad \text{avec : } a_G = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, v_0 = 0 \text{ et } x_0 = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \times 4,5 \cdot t^2 + 0 \times t + 0 \Rightarrow x(t) = 2,25 \cdot t^2$$

5 On a :  $x(t) = 2,25 \cdot t^2$  à l'instant  $t_B$  :  $x(t_B) = 2,25 \cdot t_B^2$  avec  $x(t_B) = x_B = AB$

$$\Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{AB}{2,25}} \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{36}{2,25}} \Rightarrow t_B = 4 \text{ s}$$

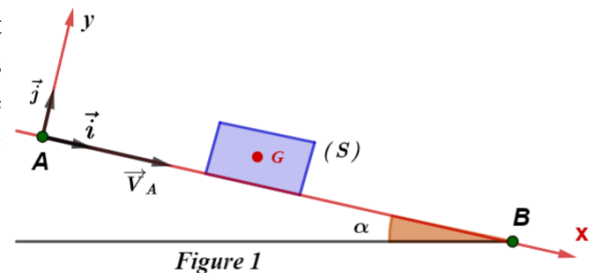
6 On a :  $V_G = 4,5 \cdot t \Rightarrow$  à l'instant  $t_B$  :  $V_B = 4,5 \cdot t_B \Rightarrow V_B = 4,5 \times 4 \Rightarrow V_B = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

## Exercice 2

On étudie le mouvement du centre d'inertie  $G$  dans le repère  $(A; \vec{i}, \vec{j})$  lié à un référentiel terrestre considéré galiléen (figure 1).

Après la phase de poussée vers le bas, le solide (S) atteint une vitesse  $V_A = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  au point A et glisse sans frottement le long de la piste rectiligne AB faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. La pente est inclinée à 20% ( $\sin \alpha = 0,20$ ).

Données : - Masse de la luge :  $m = 20 \text{ kg}$  ;  
- Intensité de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

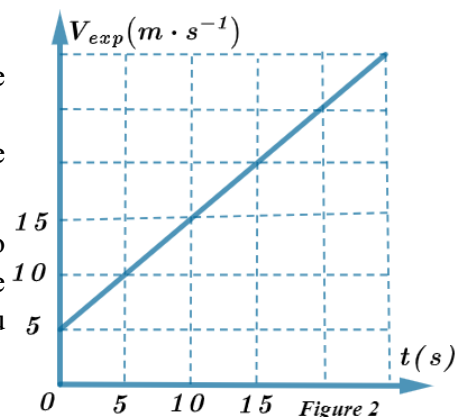


1 En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer la valeur de l'accélération  $a_{th}$  du centre d'inertie  $G$  de (S).

2 L'origine des dates ( $t = 0$ ) est choisie à l'instant du passage par le point A.

Trouver la distance parcourue, à partir du point A, lorsque la luge atteint la vitesse  $V_1 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3 On filme le mouvement de la luge, puis on exploite la vidéo avec un logiciel adapté. Ceci a permis de tracer la courbe représentant les variations de la vitesse de  $G$  en fonction du temps :  $V_{exp} = f(t)$  (figure 2).



- Déterminer graphiquement la valeur expérimentale  $a_{exp}$  de l'accélération du centre d'inertie  $G$ .
- On interprète la différence entre  $a_{th}$  et  $a_{exp}$  par l'existence de frottements. On rappelle que

lorsque le contact entre le plan incliné et la luge se fait avec frottement solide ; la piste exerce sur (S) une force  $\vec{R}$  ayant une composante tangentielle  $\vec{R}_T$  et une composante normale  $\vec{R}_N$ . Lors du mouvement de (S), les intensités de  $\vec{R}_T$  et de  $\vec{R}_N$  sont liées par la relation  $R_T = \mu \cdot R_N$ , avec  $\mu$  une constante appelée coefficient de frottement qui dépend des matériaux en contact et de leur état de surface.

Exprimer le coefficient  $\mu$  en fonction de  $a_{th}$ ,  $a_{exp}$ ,  $g$  et  $\alpha$ . Calculer sa valeur.

### Solution

#### 1 -Système étudié $\{(s)\}$

• Bilan des forces :

►  $\vec{P}$  : Son poids ►  $\vec{R}$  : réaction du plan

Dans un référentiel terrestre supposé galiléen ,on applique la deuxième loi de newton :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$$

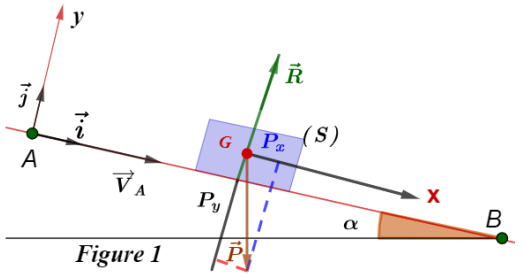
• projection sur (ox) :  $P_x + R_x = m \cdot a_x \Leftrightarrow P \cdot \sin \alpha + 0 = m \cdot a_x$

$$\Leftrightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot a_x \Leftrightarrow a_x = g \cdot \sin \alpha$$

le mouvement se fait seulement suivant l'axe (ox) donc  $a_y = 0$

d'où :

$$a_x = a_{th} = g \cdot \sin \alpha = 2 \text{ m.s}^{-2}$$



#### 2 La distance parcourue, à partir du point A , lorsque la luge atteint la vitesse $V_1 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

• On a :  $a_x = g \cdot \sin \alpha$  et les conditions initiale  $x_0 = x_A$  ,  $V_0 = V_A$

► On sait que :  $a_x = \frac{dV_x(t)}{dt}$

Par primitive + les conditions initiale :

$$V_X(t) = g \cdot \sin \alpha \cdot t + V_A$$

► On sait que :  $V_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$   
par primitive + les conditions initiale :

$$x(t) = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2 + V_A \cdot t + x_A$$

a l'instant  $t_1 = t_B$  au point B On a :  $x_B(t) = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t_1^2 + V_A \cdot t_1 + x_A$

$$\text{Donc : } x_B - x_A = AB = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t_1^2 + V_A \cdot t_1$$

• Détermination de  $t_1$  au point B :

$$V_1 = g \cdot \sin \alpha \cdot t_1 + V_A \Leftrightarrow g \cdot \sin \alpha \cdot t_1 = V_1 - V_A \Leftrightarrow t_1 = \frac{V_1 - V_A}{g \cdot \sin \alpha} \Leftrightarrow t_1 = 10 \text{ s}$$

Remplaçant dans AB :

$$AB = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t_1^2 + V_A \cdot t_1 \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2} \times 10 \times 0,2 \times (10)^2 + (5 \times 10)$$

$$AB = 150 \text{ m}$$

#### 3 a) graphiquement la valeur expérimentale $a_{exp}$ de l'accélération du centre d'inertie G est :

$$a_{exp} = \frac{\Delta V_{exp}}{\Delta t} = \frac{5 - 10}{0 - 5} \Leftrightarrow a_{exp} = 1 \text{ m.s}^{-2}$$

#### b) -Système étudié $\{(s)\}$

• Bilan des forces :

►  $\vec{P}$  : Son poids ►  $\vec{R}$  : réaction du plan  $\{ \vec{R}_T \text{ et } \vec{R}_N \}$

- Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$$

► projection sur (AX) :  $P_x + R_x = m \cdot a_x = m \cdot a_{exp} \Leftrightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha - R_T = m \cdot a_{exp}$

Donc :  $R_T = m(g \cdot \sin \alpha - a_{exp}) \Leftrightarrow R_T = m(a_{th} - a_{exp})$  Avec :  $a_{th} = g \cdot \sin \alpha$

► projection sur (AY) :  $P_y + R_y = m \cdot a_y = 0$

Le mouvement se fait seulement suivant l'axe (AX) donc  $a_y = 0$

Donc :  $-P \cdot \cos \alpha + R_N = 0 \Leftrightarrow R_N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$

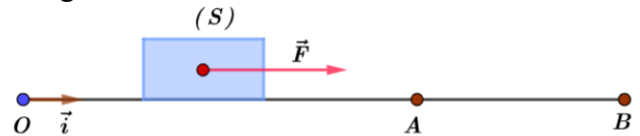
$$\text{D'où : } \mu = \frac{R_T}{R_N} = \frac{m(a_{th} - a_{exp})}{m \cdot g \cdot \cos \alpha} \Leftrightarrow \mu = \frac{(a_{th} - a_{exp})}{g \cdot \cos \alpha}$$

### Exercice 3

Un solide (S) de centre d'inertie G et de masse  $m = 0,4 \text{ kg}$  glisse avec frottement sur un plan horizontal OAB. On modélise les frottements par une force  $f$  constante de direction parallèle à la trajectoire et de sens contraire à celui du mouvement.

On choisit un repère (O, i) lié à la terre considéré comme galiléen.

Le solide est soumis, lors de son mouvement entre O et A, à une force motrice  $F$  constante, horizontale ayant le sens du mouvement.



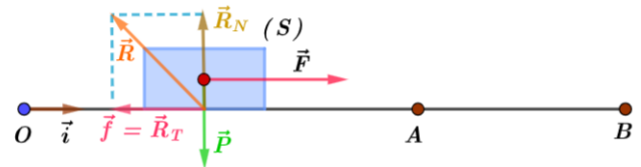
On choisit l'instant de départ de (S), à partir de O, sans vitesse initiale comme origine des dates  $t_0 = 0$

- 1 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle que vérifie l'abscisse  $x$  de G dans le repère (O, i) est :  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F - f}{m}$
- 2 Le solide (S) passe par A à l'instant  $t_A = 2 \text{ s}$ , avec la vitesse  $v_A = 5 \text{ m/s}$ . Déterminer la valeur de l'accélération  $a_1$  du mouvement de G entre O et A.
- 3 La force F s'annule lorsque la solide passe par A. Le solide continue son mouvement et s'arrête en B. On choisit l'instant de passage de (S) par A comme nouvelle origine des dates. Le solide s'arrête en B à l'instant  $t_b = 2,5 \text{ s}$ 
  - a Montrer que la valeur algébrique de l'accélération entre A et B est  $a_2 = -2 \text{ m/s}^2$ .
  - b En déduire l'intensité de la force de frottement  $F$ .
  - c En utilisant les résultats obtenus, calculer l'intensité de la force motrice  $\vec{F}$

### Solution

-Système étudié  $\{(s)\}$

- 1 • Bilan des forces :  
 ►  $\vec{P}$  : Son poids ►  $\vec{R}$  : réaction du plan  
 ►  $\vec{F}$  : Force motrice



- Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$

► projection sur (OX) :  $P_x + R_x + F_x = m a_x$  Avec :  $P_x = 0$  ;  $R_x = -f$  ;  $F_x = F$

Donc :

$$-f + F = m \cdot a_x$$

• On sait que :  $a_x = \frac{dV_x}{dt}$  et  $V_x = \frac{dx}{dt}$  Donc :  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$

►  $F - f = m \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F - f}{m}$

2 la valeur de l'accélération  $a_1$  du mouvement de  $G$  entre  $O$  et  $A$  :

On a :  $a_1 = \frac{F - f}{m}$  L'accélération est constant ,donc le mouvement rectiligne uniformément varié.

• L'équation horaire du mouvement est :  $V_A(t) = a_1 \times t_A + V_0$  Avec  $V_0 = 0$  (sans vitesse initiale)

D'où :  $V_A = a_1 \times t_A \Leftrightarrow a_1 = \frac{V_A}{t_A} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a_1 = 2,5 \text{ m/s}^2$

3 a la valeur algébrique de l'accélération entre  $A$  et  $B$  :

• On a L'équation horaire du mouvement est :  $V_B(t) = a_2 \times t_B + V_A$  Avec  $V_B(t) = 0$  (Le solide s'arrête en B)

Donc :  $a_2 \times t_B + V_A = 0 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{V_A}{t_B} = -\frac{5}{2,5} \Leftrightarrow a_2 = -2 \text{ m/s}^2$

b l'intensité de la force de frottement  $f$  :

• On a  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F - f}{m}$  Avec  $\frac{d^2x}{dt^2} = a_2$  et  $F = 0$  (La force  $F$  s'annule lorsque le solide passe par A)

Donc :  $a_2 = -\frac{f}{m} \Leftrightarrow f = -a_2 \times m \Leftrightarrow f = -(-2) \times 0,4 \Leftrightarrow f = 0,8 \text{ N}$

c La valeur de l'intensité de la force motrice  $\vec{F}$  :

• On a  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F - f}{m}$  Avec  $\frac{d^2x}{dt^2} = a_1$  et  $f = 0,8 \text{ N}$  constante

Donc :  $a_1 = \frac{F - f}{m} \Leftrightarrow a_1 \times m = F - f \Leftrightarrow F = a_1 \times m + f = 2,5 \times 0,4 + 0,8$

$F = 1,8 \text{ N}$

#### Exercice 4

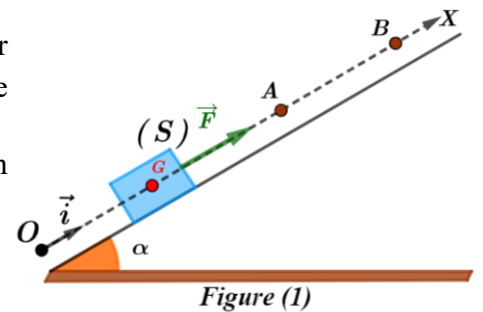
On considère un solide ( $S$ ) de masse  $m$  susceptible de glisser selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontal.

Le solide ( $S$ ) démarre sans vitesse initiale, à l'instant  $t_0 = 0$  à partir de la position  $O$  sous l'action d'une force motrice  $\vec{F}$  constante. Le solide ( $S$ ) passe par la position  $A$  avec la vitesse  $V_A$ .

On étudie le mouvement du centre d'inertie  $G$  du solide ( $S$ ) dans un repère  $(O, \vec{i})$  lié à la Terre supposé galiléen (figure 1).

L'abscisse de  $G$  à  $t_0 = 0$  est  $x_G = x_0 = 0$

Données :  $m = 100 \text{ g}$  ;  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $\alpha = 30^\circ$  ;  $v_A = 2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



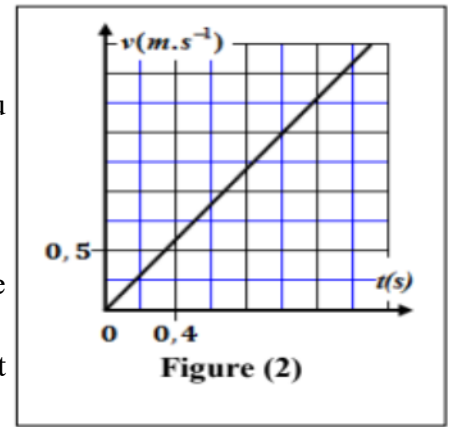
1 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $x_G$  s'écrit :

$$\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{F}{m} - g \cdot \sin \alpha$$

2 La figure (2) donne l'évolution de la vitesse  $v(t)$ .

- Déterminer graphiquement la valeur de l'accélération du mouvement de G.
- Calculer l'intensité de la force  $\vec{F}$ .

3 À partir de la position A, le solide (S) n'est plus soumis à la force motrice  $\vec{F}$  et s'arrête en une position B.  
On choisit A comme nouvelle origine des abscisses et l'instant de passage de G par A comme nouvelle origine des dates.



- En utilisant l'équation différentielle établie dans la question (1), montrer que le mouvement de G entre A et B est rectiligne uniformément varié.
- Déterminer la distance AB

### Solution

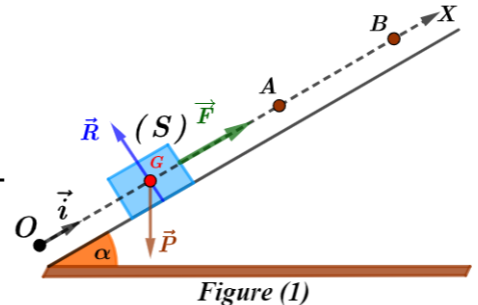
1 • Système étudié : solide (S)

Les forces exercées sur le solide (S) :

- $\vec{P}$  : le poids du solide (S) ►  $\vec{R}$  : Réaction du plan incliné
- $\vec{F}$  : force motrice.

Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$



• Projection sur l'axe (OX) :  $P_x + R_x + F_x = m \cdot a_x \Leftrightarrow -P \cdot \sin \alpha + 0 + F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

Donc :  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} - \sin \alpha \cdot \frac{m \times g}{m} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} - g \sin \alpha$

2 a La courbe de la figure " 2 " montre que la variation de la vitesse est une fonction linéaire :  $V = K \cdot t$  Avec K est le coefficient directeur de la droite .

•  $K = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1,5 - 0}{1 - 0} = 1,5 \text{ m/s}^2 \Leftrightarrow V = 1,5 \cdot t$

• On a :  $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} - g \sin \alpha$ , l'accélération est constant donc le mouvement rectiligne uniformément varié

► L'équation horaire du mouvement est :  $V = a \cdot t + V_0$  Avec  $V_0 = 0$  (Le solide (S) démarre sans vitesse initiale)

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} V = a \cdot t \\ V = 1,5t \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b l'intensité de la force  $\vec{F}$ .

• On a :  $\frac{d^2x}{dt^2} = a = \frac{F}{m} - g \sin \alpha \Leftrightarrow a + g \sin \alpha = \frac{F}{m} \Leftrightarrow F = (a + g \sin \alpha) \cdot m$   
 $\Leftrightarrow F = (1,5 + 10 \cdot \sin 30^\circ) \cdot 0,1 \Leftrightarrow F = 0,65 \text{ N}$

3 a On a  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} - g \cdot \sin \alpha$  : Avec la force motrice  $F = 0$

Donc :  $a' = -g \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow a' = -5 \text{ m/s}^2$

L'accélération "a" est constante alors le mouvement est uniformément varié et puisque la trajectoire du point G est rectiligne alors on a "Un mouvement rectiligne uniformément varié"

b) la distance AB :

► l'accélération  $a'$  est constante  $a' \neq 0$  : Alors  $x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + V_A \cdot t + x_0$

• Les conditions initiales :  $x(t=0) = x_A = 0$  et  $V(t=0) = V_0 = V_A$

Donc :

$$x_B(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_B^2 + V_A \cdot t_B$$

• La valeur de  $t_B$  :  $v(t) = at + V_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_B(t) = \frac{1}{2}at_B^2 + V_A \cdot t_B \\ t_B = -\frac{V_A}{a} \end{cases}$

•  $x_B(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{-V_A}{a}\right)^2 + V_A \cdot \left(\frac{V_A}{a}\right) \Leftrightarrow x_B(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_A^2}{a} - \frac{V_A^2}{a} \Leftrightarrow x_B(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{V_A^2}{a}$

Donc :  $AB = x_B - x_A = x_B \Leftrightarrow AB = -\frac{1}{2} \cdot \frac{V_A^2}{a} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2,4^2}{-5} \Leftrightarrow AB = 0,576 \text{ m}$

### Exercice 5

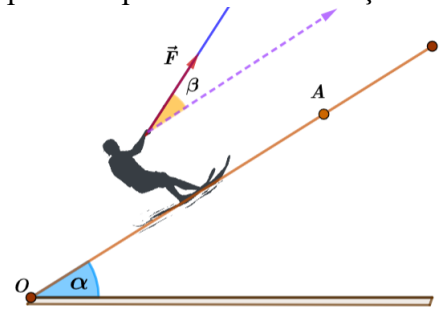
On étudie le mouvement d'un skieur sur une piste inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

Le skieur est tiré par un câble faisant un angle  $\beta$  avec la grande pente du plan incliné et exerçant une force constante d'intensité  $F = 450 \text{ N}$  sur le skieur .

le mouvement se fait avec frottements.

Données :

- Masse du skieur  $m = 80 \text{ Kg}$
- Intensité de gravitation  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
- la distance  $OA = 150 \text{ m}$  ;
- l'angle d'inclinaison  $\alpha = 20^\circ$  et  $\beta = 15^\circ$
- Force de frottement considérée constante  $f = 90 \text{ N}$ .



- 1 En appliquant la 2ème loi de Newton déterminer l'abscisse  $x_{Gx}$  de vecteur accélération du centre d'inertie de skieur . Quelle est la nature de son mouvement ?
- 2 Déterminer les équations horaires  $v(t)$  et  $x(t)$  du mouvement, on prend comme origine des dates lorsque le skieur est au point O et la vitesse initiale nulle.
- 3 Calculer la vitesse du skieur au point A.
- 4 Calculer l'intensité de la réaction du plan sur le skieur .

### Solution

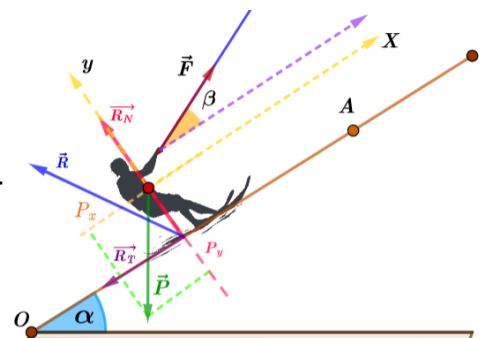
1 Système étudié : {Le skieur}

- Forces extérieures agissant sur le skieur sont :  
 ►  $\vec{P}$  : Poids du skieur ►  $\vec{R}$  : Réaction du plan incliné  
 ►  $\vec{F}$  : Tension du câble

Dans un référentiel terrestre supposé galiléen ,on applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$

• Projection sur l'axe (OX) :  $P_x + R_x + F_x = m \cdot a_{Gx}$   
 $\Leftrightarrow -P \cdot \sin \alpha - f + F \cdot \cos \beta = m a_{Gx}$



$$\Leftrightarrow a_{Gx} = \frac{1}{m} (-mg \cdot \sin \alpha - f + F \cos(\beta)) \Leftrightarrow a_{Gx} = \frac{F \cos \beta - f}{m} - g \cdot \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow a_{Gx} = \frac{450 \cdot \cos 15^\circ - 90}{80} - 9,81 \cdot \sin 20^\circ \Leftrightarrow a_{Gx} = 0,95 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

• L'accélération  $a_{Gx} \neq 0$  est constante alors le mouvement est uniformément varié et puisque la trajectoire du point  $G$  est rectiligne alors on a Un mouvement rectiligne uniformément varié

2 ► On sait que :  $a = \frac{dV(t)}{dt}$

Par primitive + les conditions initiale :

On a : à  $t = 0 \Leftrightarrow V = V_0 = 0$

$\Leftrightarrow V(t) = a \cdot t + V_0$

Donc :  $V(t) = a \cdot t$

► On sait que :  $V(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

par primitive + les conditions initiale :

On a : à  $t = 0 \Leftrightarrow V = V_0 = 0$  et  $x = x_0 = 0$

$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + V_0 \cdot t + x_0$

Donc :  $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

3 la vitesse du skieur au point A : On a  $V_A(t) = a \cdot t_A$

►  $t_A = ?? \Leftrightarrow x_A(t) = OA = \frac{1}{2} a \cdot t_A^2 \Leftrightarrow t_A = \sqrt{\frac{2 \cdot OA}{a}}$

Donc :  $V(t) = a \cdot t_A + V_0 \Leftrightarrow V_A = a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot OA}{a}} = \sqrt{2 \cdot OA \cdot a} \Leftrightarrow V_A = \sqrt{2 \cdot 150 \cdot 0,95}$

$V_A = 16,88 \text{ m/s}$

4 l'intensité de la réaction du plan sur le skieur :

On a :  $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \times \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

► Projection sur l'axe (OY) :  $P_y + R_y + F_y = 0$ , car le mouvement se fait seulement suivant l'axe (OX) donc  $a_y = 0$

$\Leftrightarrow -P \cdot \cos \alpha + R_N + F \cdot \sin \beta = 0 \Leftrightarrow R_N = mg \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta$

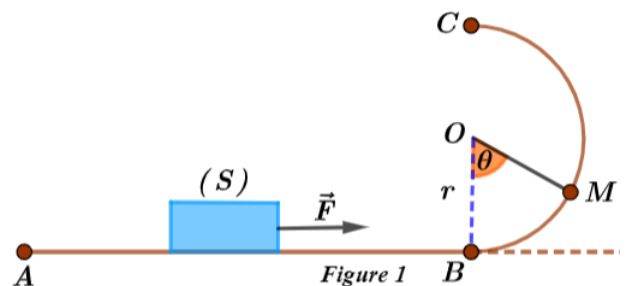
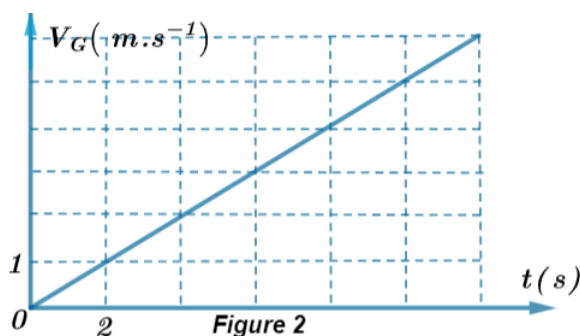
$\Leftrightarrow R_N = 80 \times 9,81 \times \cos 20^\circ - 450 \times \sin 15^\circ \Leftrightarrow R_N = 621 \text{ N}$

D'où :  $R = \sqrt{R_N^2 + R_T^2} \Leftrightarrow R = \sqrt{621^2 + 90^2} \Leftrightarrow R = 627 \text{ N}$

### Exercice 6

Un corps solide (S) de masse  $m = 2,5 \text{ kg}$  peut glisser sur une raille formée d'une portion rectiligne AB de longueur  $L$  et d'une portion circulaire de rayon  $r = 50 \text{ cm}$  fig(1). Le corps (S) est soumis à l'action d'une force  $F$  constante d'intensité  $F = 6 \text{ N}$ ,

Le corps (S) part de la position A sans vitesse initiale à une date considérée comme origine des temps, il arrive à la position B avec une vitesse  $V_B = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , les frottements sur la portion AB sont équivalents à une force constante d'intensité  $f$ . La figure 2 représente la variation de la vitesse du centre d'inertie du corps en fonction du temps. On donne  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



## 1- Étude du mouvement sur la portion A B :

- 1 Écrire l'équation de la vitesse et déduire la valeur de  $a_G$  accélération du centre d'inertie du corps (S).
- 2 Déterminer la nature du mouvement du centre d'inertie.
- 3 Écrire l'équation horaire  $x(t)$  du mouvement du centre d'inertie G.
- 4 Calculer la valeur de la distance  $L$ .
- 5 En appliquant la deuxième loi de Newton calculer l'intensité de la force de frottement.
- 6 calculer l'intensité de la réaction du plan .

## 2-Étude du mouvement sur la portion BC :

A son arrivé à la position B la force  $F$  est éliminée; le corps (S) poursuit son point M est repérée par l'abscisse angulaire  $\theta = 60^\circ$ ; on donne la vitesse d'arrivée au point M est  $V_M = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- a Trouver l'expression de l'intensité de la force  $R$  appliquée par la raille sur le corps (S) au point M en fonction de :  $g, r, V_M$  et  $\theta$  . Calculer sa valeur.
- b Trouver les composante  $a_T$  et  $a_N$  du vecteur accélération au point M.

## Solution

## 1- Étude du mouvement sur la portion A B :

- 1 La courbe est une fonction linéaire :  $V = K \cdot t$  Avec K est le coefficient directeur de la droite.

$$\bullet K = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{2} \cdot t \Leftrightarrow \text{Donc : } a_G = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

- 2 L'accélération  $a_G \neq 0$  est constante alors le mouvement est uniformément varié et puisque la trajectoire du point G est rectiligne alors on a Un mouvement rectiligne uniformément varie

- 3 On sait que :  $V_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + V_0 \cdot t + x_0$

• par primitive + les conditions initiale : à  $t = 0 \Leftrightarrow V = V_0 = 0$  et  $x = x_A$

$$\blacktriangleright x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + x_A \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 + x_A$$

- 4 la valeur de la distance  $L = AB$  :

• On sait que :  $x(t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 + x_A \Leftrightarrow$  Au point B :  $x_B - x_A = AB = L = \frac{1}{4} \cdot t_B^2$

• On sait que :  $V(t) = \frac{1}{2} \cdot t \Leftrightarrow$  Au point B :  $V_B(t) = \frac{1}{2} \cdot t_B \Leftrightarrow t_B = 2 \cdot V_B(t)$

$$\text{Donc : } L = \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot V_B)^2 \Leftrightarrow L = 4 \text{ m}$$

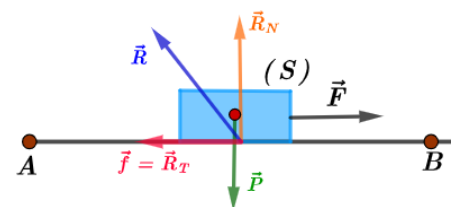
- 5 l'intensité de la force de frottement :

►  $\vec{P}$  : son Poids ►  $\vec{R}$  : Réaction du plan

►  $\vec{F}$  : Force constante

**Dans un référentiel terrestre supposé galiléen ,on applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :**

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \times \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$



• Projection sur  $(OX)$  :  $P_x + R_x + F_x = m \cdot a_x \Leftrightarrow 0 - f + F = m \cdot a_G$   
 $\Leftrightarrow f = F - m \cdot a_G = 6 - 2,5 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow f = 4,75N$

6 l'intensité de la réaction du plan : On a  $R = \sqrt{f^2 + R_N^2}$

• Projection sur  $(OY)$  :  $P_y + R_y + F_y = m \cdot a_y = 0 \Leftrightarrow -P + R_N + 0 = 0 \Leftrightarrow R_N = P = mg$   
 $\Leftrightarrow R = \sqrt{f^2 + (mg)^2} \Leftrightarrow R = \sqrt{4,75^2 + (2,5 \times 10)^2} \Leftrightarrow R = 25,45N$

## 2-Étude du mouvement sur la portion BC :

- a) L'expression de l'intensité de la force  $R$  appliquée par la raille sur le corps (S) au point M en fonction de :  $g, r, V_M$  et  $\theta$

• Système étudié : solide (S)

Les forces exercées sur le solide (S) :

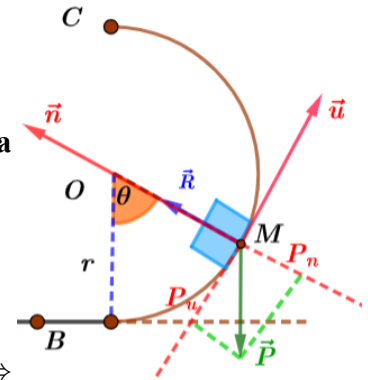
►  $\vec{P}$  : le poids du solide ►  $\vec{R}$  : Réaction du plan

**Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :** ►  $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$

• Projection sur  $\vec{n}$  de la base de frenet :  $P_n + R_n = m \cdot a_n$

$$\Leftrightarrow -P \cdot \cos \theta + R = m \cdot \frac{V_M^2}{r} \Leftrightarrow R = m \cdot \frac{V_M^2}{r} + mg \cdot \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow R = 2,5 \times \frac{1,5^2}{50 \times 10^{-2}} + 2,5 \times 10 \times \cos 60^\circ \Leftrightarrow R = 23,75N$$



- b) Les composante  $a_T$  et  $a_N$  du vecteur accélération au point M

• Pour accélération normale :  $a_n = \frac{V_M^2}{r} \Leftrightarrow \text{AN : } a_n = \frac{1,5^2}{50 \times 10^{-2}} \Leftrightarrow a_n = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

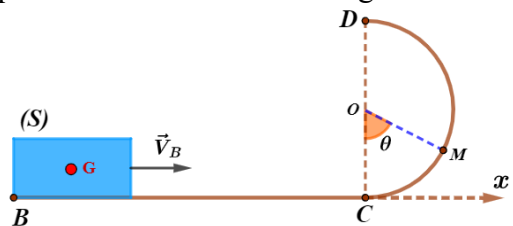
• Pour l'accélération tangentielle : ► Projection sur  $\vec{u} \Leftrightarrow P_u + R_u = m \cdot a_T$

$$\Leftrightarrow -P \cdot \sin \theta + 0 = m \cdot a_T \Leftrightarrow -mg \cdot \sin \theta = m \cdot a_T \Leftrightarrow a_T = -g \cdot \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \text{AN : } a_T = -10 \cdot \sin 60^\circ \Leftrightarrow a_T = -8,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

### Exercice 6

Une piste BCD dans un plan vertical est constituée d'une partie BC horizontale de longueur  $BC = 80 \text{ cm}$  et d'une partie CD circulaire de rayon  $r = 10 \text{ cm}$ . On lance, à  $t = 0$ , un corps (S) de masse  $m = 200 \text{ g}$  à partir du point B origine de repère  $(B, x)$  considéré galiléen avec une vitesse initiale  $v_B = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et le corps (S) se déplace sur la partie BC avec frottement. On prend  $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



**Rappel : dans le repère de Frenet, le vecteur accélération s'écrit :**

$$\vec{a}_G = \vec{a}_T + \vec{a}_n = a_T \cdot \vec{u} + a_n \cdot \vec{n} \quad \text{avec : } a_T = \frac{dV}{dt} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{V^2}{r}$$

- 1 Trouver l'expression de la force de frottement  $f$ , calculer sa valeur sachant que l'accélération  $a_{Gx}$  du centre d'inertie est  $a_{Gx} = -2m \cdot \text{s}^{-2}$ .
- 2 Calculer la valeur de la réaction de la partie BC sur le corps (S). Déduire la valeur de l'angle de frottement.
- 3 En utilisant les équations horaires  $V(t)$  et  $x(t)$  déterminer la vitesse  $V_C$  au point C.

- 4 Arrivant au point C, le corps (S) continue son mouvement sur la partie circulaire CD sans frottement.
- Trouver l'expression de la force de réaction  $R$  appliquée par la partie  $CD$  sur le corps (S) à la position  $M$  repérée par l'angle  $\theta$  en fonction de :  $m, g, r, \theta$  et  $V_M$  la vitesse au point M.
  - Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre  $C$  et  $M$  et montrer que l'expression de  $V_M$  s'écrit :  $V_M = \sqrt{V_C^2 - 2 \cdot g \cdot r(1 - \cos \theta)}$ .
  - Déterminer la valeur de l'angle maximal  $\theta_{\max}$  pour lequel le solide (S) revient dans le sens inverse.
  - Calculer l'intensité de la force de réaction  $R$  à cet angle.

## Solution

- 1 l'expression de la force de frottement  $f$

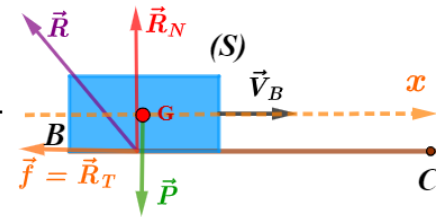
►  $\vec{P}$  : le Poids de corps ►  $\vec{R}$  : Réaction du plan

Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :

$$\bullet \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \times \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$$

Projection sur (BX) :  $P_x + R_x + f_x = m a_{Gx} \Leftrightarrow 0 + 0 - f = m a_{Gx}$

$$\Leftrightarrow f = -m a_{Gx} = -0,2 \times (-2) \Leftrightarrow f = 0,4 \text{ N}$$



- 2 la valeur de la réaction de la partie BC sur le corps (S) :  $\Leftrightarrow$  On a :  $R = \sqrt{f^2 + R_N^2}$

• Projection sur (BY) :  $P_y + R_y = m a_y = 0 \Leftrightarrow -P + R_N = 0 \Leftrightarrow R_N = P = mg$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{f^2 + (mg)^2} \Leftrightarrow R = \sqrt{0,4^2 + (0,2 \times 9,81)^2} \Leftrightarrow R = 2 \text{ N}$$

• La valeur de l'angle de frottement :  $\tan \varphi = \frac{R_T}{R_N} \Leftrightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{R_T}{R_N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0,4}{1,96}\right)$

- 3 la vitesse  $V_C$  au point C.

L'accélération  $a_{Gx} \neq 0$  est constante donc le mouvement rectiligne uniformément varié

4 ► On sait que :  $a = \frac{dV(t)}{dt}$

$$\Leftrightarrow V(t) = a_{Gx} \cdot t + V_0$$

Par primitive + les conditions initiale :

On a : à  $t = 0 \Leftrightarrow V_0 = V_B = 2 \text{ m/s}$

Donc :  $V(t) = -2t + 2$

► On sait que :  $V(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_{Gx} \cdot t^2 + V_0 t + x_0$$

par primitive + les conditions initiale :

On a : à  $t = 0 \Leftrightarrow V_0 = V_B = 2 \text{ m/s}$  et  $x_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2} (-2) \cdot t^2 + 2t \Leftrightarrow x(t) = -t^2 + 2t$$

Au point C on a :  $\Leftrightarrow V_C = -2t_C + 2 \Leftrightarrow BC = x_C - x_B = x_C \Leftrightarrow BC = -t_C^2 + 2 \cdot t_C$

$$\Leftrightarrow -t_C^2 + 2t_C = 80 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow t_C^2 - 2t_C + 0,8 = 0 \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 0,8$$

Donc : ►  $t_C = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Leftrightarrow t_C = \frac{2 - \sqrt{0,8}}{2} = 0,55 \text{ s}$$

$$\Leftrightarrow V_C = -2 \times 0,55 + 2 = 0,9 \text{ m/s}$$

►  $t_C = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Leftrightarrow t_C = \frac{2 + \sqrt{0,8}}{2} = 1,44 \text{ s}$$

$$\Leftrightarrow V_C = -2 \times 1,44 + 2 = -0,88 \text{ m/s} < 0$$

D'où la valeur de la vitesse au point C est

$$V_C = 0,9 \text{ m/s}$$

- 5 a L'expression de l'intensité de la force  $R$  appliquée par la raille sur le corps (S) au point M en fonction de :  $g, r, V_M$  et  $\theta$

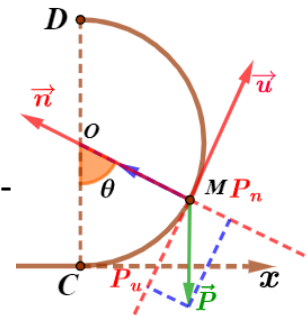
- Système étudié : solide (S)

Les forces exercées sur le solide (S) :

►  $\vec{P}$  : le poids du solide ►  $\vec{R}$  : Réaction du plan

Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton : ►  $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$

- Projection sur  $\vec{n}$  de la base de frenet :  $P_n + R_n = m \cdot a_n$



$$\Leftrightarrow -P \cdot \cos \theta + R = m \cdot \frac{V_M^2}{r} \Leftrightarrow R = m \cdot \frac{V_M^2}{r} + mg \cdot \cos \theta \Leftrightarrow R = m \left( g \cdot \cos \theta + \frac{V_M^2}{r} \right)$$

- b) Le théorème de l'énergie cinétique entre C et M :

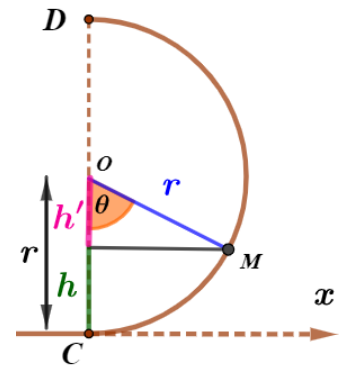
$$\Leftrightarrow \Delta E_c = \sum_{c \rightarrow M} W(\vec{F}_{ext}) \Leftrightarrow E_c(M) - E_c(C) = W_{c \rightarrow M}(\vec{P}) + W_{c \rightarrow M}(\vec{R})$$

- $w_{c \rightarrow M}(\vec{R}) = 0$  Car  $\vec{R} \perp CM$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} m V_M^2 - \frac{1}{2} m V_C^2 = -mgh + 0$$

► Graphiquement :  $h = r - h'$  Avec  $\cos \theta = \frac{h'}{r}$

$$\Leftrightarrow h' = r \cos \theta \Leftrightarrow h = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$



$$\text{D'où : } \frac{1}{2} m V_M^2 - \frac{1}{2} m V_C^2 = -mgr(1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} m V_M^2 = -mgr(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} m V_C^2$$

$$\Leftrightarrow V_M^2 = -2gr(1 - \cos \theta) + V_C^2 \Leftrightarrow V_M = \sqrt{V_C^2 - 2 \cdot g \cdot r(1 - \cos \theta)}$$

- c) On a pour  $\theta = \theta_{\max}$  La valeur de la vitesse est  $V_M = 0$

$$\text{Donc : } V_M = 0 = \sqrt{V_C^2 - 2 \cdot g \cdot r(1 - \cos \theta_{\max})} \Leftrightarrow V_C^2 - 2 \cdot g \cdot r(1 - \cos \theta_{\max}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos \theta_{\max} = \frac{V_C^2}{2 \cdot g \cdot r} \Leftrightarrow \cos \theta_{\max} = 1 - \frac{V_C^2}{2gr} \Leftrightarrow \cos \theta_{\max} = 1 - \frac{0,9^2}{2 \times 81 \times 10^{-2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta_{\max} = 0,58 \Leftrightarrow \theta_m = \cos^{-1}(0,58) \Leftrightarrow \theta_m = 54,04^\circ$$

- d) On a :  $R = m \left( g \cdot \cos \theta + \frac{V_M^2}{r} \right)$  Avec  $V_M = 0$

$$\text{Donc : } R = 200 \cdot 10^{-3} \times \left( \frac{0^2}{10 \cdot 10^{-2}} + 9,81 \cdot \cos 54,04 \right) \Leftrightarrow R = 1,15 \text{ N}$$